

ANJIM أنجيم

Hard\_equation

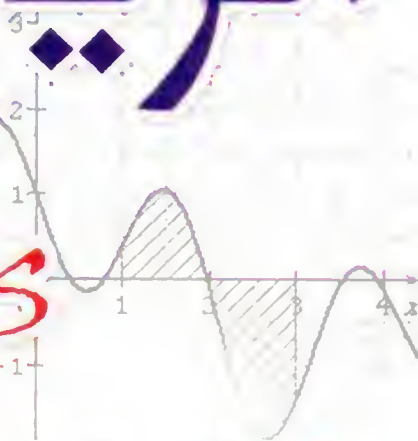
# الرياضيات

في



ثانوي

3AS



جبر تحليل هندسة

رياضيات  
تقني رياضي  
علوم تجريبية

- ملخص عملي للدرس .
- تمارين محلولة للتطبيق .
- تمارين مقترحة للتدريب .
- مواضيع بكالوريا أجنبية محلولة .
- دليل استعمال الآلة الحاسبة المبرمجة .

إعداد : الأستاذ تزقنين مصطفى

وفقا للبرنامج الجديد لوزارة التربية الوطنية



أنجيم ANJIM

# الرياضيات في

ثانوي

3

الخص عملي للدرس .

• تمارين محلولة ، تطبيق .

• تمارين مقترحة للتدريب .

• مواضيع بكالوريا أجنبية محلولة .

• دليل إستعمال الآلة الحاسبة المبرمجة .

رياضيات

تقني رياضي

علوم تجريبية

إعداد : الأستاذ ترفعين مصطفى

وفقا للبرنامج الجديد لوزارة التربية الوطنية

## مقدمة

ينفتح هذا الكتاب إلى تلاميذ أقسام السنة الثالثة ثانوي، بشعبه العلمية، ويدخل في إطار مسلسلة 10-11. هـ. تدعى ((أنجيم)) - المُنْهَد -. وقد أعدت الكتاب وفقا لبرنامج الرسمي الجديد لوزارة التربية الوطنية. الم.ن. سيترغ في تطبيقه مع هذه الأقسام ابتداء من هذه السنة الدراسية 2008/2007.

### أهداف الكتاب

- تمكّن التلميذ من الحصول على معلومات محدّدة ومنهجية.
- مساعد التلميذ على تطبيق المعلومات التي تحصل عليها في القسم.
- بدوّت التلميذ على الاستيعاب الحسن والمُتّاح جيد للمعلومات.
- حفّز التلميذ لاجتياز امتحان الك... ..

### محتوى الكتاب

- يحتوي الفصل الأول من هذا الكتاب على مختصرات لمباحث العشرة التي يتضمّن فيها البرنامج الدراسي لمادة الرياضيات. يُقدّم المختصر على شكل: تعريف - مبرهنة - لمُحفظ - نتائج . ويكون داخل إطار، يحدّد للتلميذ بالصيغة بداية ونهاية المعلومة.
  - يتّبع كل محور خمسة تمرينات تطبيقية متوالية.
  - في نهاية كل محور نجد التلميذ عشرة تمرينات لتدريبه تتّمس بمهارات المحور.
  - تُخصّص الجزء الثاني من الكتاب للكالوريا (2005/2006/2007) لدول أجنبية. يتماشى برنامجها الدراسي في مادة الرياضيات و البرنامج الرسمي الجديد لوزارة التربية الوطنية الجزائرية.
  - يتّبع كل موضوع مقترح للحل.
  - في نهاية الكتاب. نجد التلميذ بعض الدسائر الأكثر استعمالا في هذا البرنامج.
  - في نهاية الكتاب. نجد التلميذ بعض التعميمات الخاصة باستعمال المبرهنة 83 plus 11.
- أعزائي التلاميذ: أحسبوا لتطبيقاتكم لسحاح في عديد سمّة البرنامج. أصعب بين أيديكم هذا الكتاب. الذي يأتي ليساعدكم. ويدلّل بعض الصعوبات التي ربما تعترضكم خلال تحضير انكم للامتحان.
- أرجو لك عزيزي التلميذ التوفيق في استعمال هذا الكتاب. وتحذر الإشارة هنا إلى ضرورة حل التمرين من طرف التلميذ قبل الإطلاع على الحل. ((المهم في التمرين هو حله والأهم هو التفكير في حله.))
- هذا الكتاب: يبقى إلى ما بعد البكالوريا كمرجع للطالب، كونه يتضمّن منحصّات مفاهيم أساسية في البرنامج العام للرياضيات.

الأستاذ: ترفعين مصطفى

ثانوية مفدي زكرياء - بني يزقن - ولاية غرداية // العنوان الالكتروني: mtizmath@gmail.com

بسم الله الرحمن الرحيم

Hard\_equation

عنوان الكتاب أنجيم في الرياضيات 3 ثانوي

الأستاذ : ترفعين مصطفى

إعداد

دار نزهة الألباب

لنشر الكتب ووسائل

العلم و المعرفة

ساحة العقيد لطفي غرداية

هاتف فاكس: 029.88.35.49

هاتف Tel : 029.89.95.80

الإيداع القانوني

3367/2007

ISBN 978-9961-6615-7-5

تصميم الغلاف

CYCLOPEDIA

الفريق التقني لدار نزهة الألباب

جميع الحقوق محفوظة للمؤلف

لا يجوز نشر أي جزء من هذا الكتاب

أو تصويره أو تخزينه بأي وسيلة من الوسائل

دون موافقة كتابية من الناشر

All rights reserved. No part of this book may be reproduced, transmitted in any form or by any means without prior permission in writing of the publisher.

محفوظ  
جميع الحقوق

# 1- الحساب

ما يجب أن يعرف:-----

★ قابلية القسمة في %.

♦ قاسم ومضاعف عدد صحيح:

تعريف

$a$  و  $h$  عددان صحيحان.

نقول أن  $h$  يقسم  $a$  إذا وجد عدد صحيح  $k$  بحيث:  $a = kh$  ونرمز بـ:  $h \mid a$ .

نقول أيضا أن: العدد  $h$  قاسم للعدد  $a$ . وكذلك أن: العدد  $a$  مضاعف للعدد  $h$ .

♦ خواص.

• كل عدد صحيح هو قاسم للعدد 0، و 0 هو المضاعف الوحيد للعدد 0.

• مضاعفات عدد صحيح غير معلوم  $n$  هي الأعداد من الشكل  $kn$  حيث  $k$  عدد صحيح،

ونرمز بجموعة هذه المضاعفات بـ:  $n\%$ . ولدينا  $0\% = \{0\}$

• من أجل كل عدد صحيح  $a$ ، العدد 1 هو قاسم للعدد  $a$ .

• كل عدد صحيح  $a$  يقبل على الأقل القواسم:  $1, -1, a, -a$ .

• من أجل كل عددين صحيحين  $a$  و  $h$ . إذا كان  $h$  يقسم  $a$  و  $a$  يقسم  $h$

فإن  $a = h$  أو  $a = -h$ .

•  $a, h, c$  أعداد صحيحة:

- إذا كان  $a$  يقسم  $h$  و  $h$  يقسم  $c$  فإن  $a$  يقسم  $c$

- إذا كان  $a$  يقسم  $h$  فإن  $a$  يقسم  $hc$

- إذا كان  $a$  يقسم  $h$  فإن  $ac$  يقسم  $hc$

- إذا كان  $a$  يقسم  $h$  و  $a$  يقسم  $c$  فإن  $a$  يقسم  $h + c$

و  $a$  يقسم  $h - c$

Hard\_equation

الفصل الأول

ملخصات للدروس

تمارين تطبيقية

تمارين للحل



- إذا كان  $a$  يقسم  $h$  و  $a$  يقسم  $c$  فإن  $a$  يقسم  $kh + k'c$  حيث  $k$  و  $k'$  عددان صحيحان.

♦ القسمة الإقليدية في  $N$ .

### تعريف

$a$  و  $b$  عددان طبيعيان، حيث  $b$  يختلف عن الصفر. توجد ثنائية وحيدة  $(q; r)$  من الأعداد الطبيعية حيث:  $0 \leq r < b$  و  $a = bq + r$ . عملية إيجاد الثنائية  $(q; r)$  انطلاقاً من  $a$  و  $b$  تدعى القسمة الإقليدية للعدد  $a$  على العدد  $b$ .  $q$  يدعى حاصل القسمة و  $r$  يدعى باقي القسمة.

### للحفظ

$b$  يقسم  $a$  إذا وفقط إذا كان في القسمة الإقليدية للعدد  $a$  على العدد  $b$ ، باقي القسمة  $r$  معدوم. عند قسمة العدد الطبيعي  $a$  على العدد الطبيعي غير المعدوم  $b$  يكون باقي القسمة إما  $0$ ، إما  $1$ ، إما  $2$ ، إما... إما  $(b-1)$ .

♦ الموافقة العددية في  $Z$ .

### تعريف

$a$  و  $b$  عددان صحيحان، و  $n$  عدد طبيعي. نقول أن العدد  $a$  يوافق العدد  $b$  برصيد  $n$  إذا وفقط إذا كان العدد  $(a-b)$  مضاعف  $n$  ونرمز:  $a \equiv b[n]$

### للحفظ

- $a, b, c$  أعداد صحيحة و  $n$  عدد طبيعي غير معدوم.
- $a \equiv a[n]$  (الانعكاسية).
- إذا كان  $a \equiv b[n]$  فإن  $b \equiv a[n]$  (التناظرية). نقول أن  $a$  و  $b$  متوافقان.
- إذا كان  $a \equiv b[n]$  و  $b \equiv c[n]$  فإن  $a \equiv c[n]$  (المتعدية).
- $a \equiv 0[n]$  يكافئ  $a$  يقبل القسمة على  $n$ .

### للحفظ

- $a, b, a', b'$  أعداد صحيحة و  $m, n$  عددان طبيعيان غير معدومين.
- $a \equiv b[n]$  يكافئ  $(a + a') \equiv (b + a')[n]$ .
- إذا كان  $a \equiv b[n]$  و  $a' \equiv b'[n]$  فإن  $a + a' \equiv b + b'[n]$ .
- إذا كان  $a \equiv b[n]$  فإن  $aa' \equiv ba'[n]$ .
- إذا كان  $a \equiv b[n]$  و  $a' \equiv b'[n]$  فإن  $a \times a' \equiv b \times b'[n]$ .
- إذا كان  $a \equiv b[n]$  فإن  $a^m \equiv b^m[n]$ .

♦ القاسم المشترك الأكبر  $PGCD$

### تعريف

$a$  و  $b$  عددان طبيعيان غير معدومين. القاسم المشترك الأكبر للعددين  $a$  و  $b$  هو أكبر عنصر في مجموعة القواسم المشتركة لهذين العددين. يرمز له  $PGCD(a; b)$

### مبرهنة 1

إذا كان  $r$  هو الباقي في القسمة الإقليدية للعدد الطبيعي غير المعدوم  $a$  على العدد الطبيعي غير المعدوم  $b$  وكان  $r \neq 0$ ، فإن مجموعة القواسم المشتركة للعددين  $a$  و  $b$  هي مجموعة القواسم المشتركة للعددين  $b$  و  $r$ .

### للحفظ

- $a, b, c$  أعداد طبيعية غير معدومة.
- $PGCD(a; b; c) = PGCD(PGCD(a; b); c)$ .
- $PGCD(a; b) = b$  يكافئ  $b$  يقسم  $a$ .
- $PGCD(a \times c; b \times c) = c \times PGCD(a; b)$ .
- $PGCD(a; b) = 1$  يكافئ  $a$  و  $b$  أوليان فيما بينهما).
- $PGCD(a; b) = d$  يكافئ  $(\frac{a}{d} \text{ و } \frac{b}{d})$  أوليان فيما بينهما.
- مجموعة القواسم المشتركة للعددين  $a$  و  $b$  هي مجموعة قواسم العدد  $PGCD(a; b)$ .

## خوارزمية إقليدس

$a$  و  $b$  عددين طبيعيين غير معدومين حيث  $b < a$  و  $b$  لا يقسم  $a$ .

نسمي  $q_1$  و  $r_1$  الحاصل والباقي في القسمة الإقليدية لعدد  $a$  على العدد  $b$ .

بأخرى قسمة إقليدية للعدد  $b$  على العدد  $r_1$ ، وهكذا إلى أن نصل إلى باق معدوم. فكتب القسومات الإقليدية المتتابعة كما يلي:

$$a = bq_1 + r_1 \quad (0 < r_1 < b)$$

$$b = r_1q_2 + r_2 \quad (0 < r_2 < r_1)$$

$$r_1 = r_2q_3 + r_3 \quad (0 < r_3 < r_2)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$r_{p-1} = r_pq_{p+1} + 0$$

هذه القسومات الإقليدية المتتابعة

تدعى خوارزمية إقليدس.

المتتالية  $(r_n)$  موجبة ومتناقصة

تماماً. أصغر حد لها غير معلوم

هو  $\text{PGCD}(a; b)$ .

## مبرهنة 2- بـرو

عددان طبيعيين غير معدومين  $a$  و  $b$ ، أوليان فيما بينهما إذا وفقط إذا وجد

عددان صحيحان  $\alpha$  و  $\beta$  بحيث:  $a\alpha + b\beta = 1$ .

## مبرهنة 3- غوص

$a$ ،  $b$  و  $c$  أعداد طبيعية غير معدومة. إذا كان  $a$  يقسم  $b \times c$  و كان  $a$

و  $b$  أوليان فيما بينهما، فإن  $a$  يقسم  $c$ .

## للحفظ

• إذا كان عدد طبيعي  $a$  يقبل القسمة على عددين طبيعيين أوليين فيما بينهما

$b$  و  $c$  فإن العدد  $a$  يقبل القسمة على  $bc$ .

• إذا كان  $\text{PGCD}(a; b) = d$  فإنه يوجد عددان صحيحان  $\alpha$  و  $\beta$

بحيث:  $a\alpha + b\beta = d$ .

• عدد طبيعي أولي مع جلاء عددين طبيعيين إذا وفقط إذا كان أولي مع كل عامل من الجلاء.

## المضاعف المشترك الأصغر PPCM

## تعريف

$a$  و  $b$  عددان طبيعيين غير معدومين.

المضاعف المشترك الأصغر للعددين  $a$  و  $b$  هو أصغر عنصر غير معلوم في مجموعة

المضاعفات المشتركة لذين العددين. يرمز له  $\text{PPCM}(a; b)$ .

## خواص

$a$ ،  $b$  و  $c$  أعداد طبيعية غير معدومة.

$$\text{PPCM}(a; b; c) = \text{PPCM}(\text{PPCM}(a; b); c).$$

$$\text{PPCM}(a; b) = a \text{ معناه } a \text{ مضاعف } b.$$

$$\text{PPCM}(a \times c; b \times c) = c \times \text{PPCM}(a; b).$$

$$\text{PPCM}(a; b) = ab \text{ معناه } (a \text{ و } b \text{ أوليان فيما بينهما}).$$

$$\text{PGCD}(a; b) \times \text{PPCM}(a; b) = ab.$$

$$\text{PPCM}(a; b) = m \text{ معناه } \left(\frac{m}{a} \text{ و } \frac{m}{b} \text{ أوليان فيما بينهما}\right).$$

• مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين  $a$  و  $b$  هي مجموعة مضاعفات العدد

$$\text{PPCM}(a; b)$$

## الأعداد الأولية

## تعريف

العدد طبيعي  $p$  أولي إذا وفقط إذا قبل قاسمان بالضبط وهما: 1 و  $p$ .

## للحفظ

• العددين 0 و 1 غير أوليين.

• العدد 2 هو أول عدد طبيعي أولي وهو الطبيعي الزوجي الأولي الوحيد.

• إذا كان  $p$  عدد أولي فهو أولي مع الأعداد 2، 3، ...،  $p-1$ .

• إذا كان عدد أولي يقسم جمل عوامل فهو يقسم أحد هذه العوامل.

• كل عدد طبيعي أكبر من 1 يقبل على الأقل قاسماً أولياً.

• كل عدد طبيعي غير أولي  $n$  وأكبر من 1 يقبل على الأقل قاسماً أولياً  $p$  حيث:  $p^2 \leq n$ .

متتالية  
الأعداد  
الأولية غير  
منتبهة.

## طريقة

اكتب العدد 485 في النظام ذي الأساس 2 ثم الأساس 5 ثم الأساس 12.

$$\begin{aligned}
 485 &= 2 \times 242 + 1 \\
 485 &= 12 \times 40 + 5 & 485 &= 5 \times 97 + 0 & 242 &= 2 \times 121 + 0 \\
 40 &= 12 \times 3 + 4 & 97 &= 5 \times 19 + 2 & 121 &= 2 \times 60 + 1 \\
 & & 19 &= 5 \times 3 + 4 & 60 &= 2 \times 30 + 0 \\
 & & & & 30 &= 2 \times 15 + 0 \\
 & & & & 15 &= 2 \times 7 + 1 \\
 & & & & 7 &= 2 \times 3 + 1 \\
 & & & & 3 &= 2 \times 1 + 1
 \end{aligned}$$

أي  $485 = \overline{111100101}^{(2)}$  ، أي  $485 = \overline{3420}^{(5)}$  ، أي  $485 = \overline{345}^{(12)}$

## طريقة

انشر العدد  $1\alpha 52^{(11)}$  في أساسه ثم اكتبه في النظام ذي الأساس 7.

$$\begin{aligned}
 \overline{1\alpha 52}^{(11)} &= 2 \times 11^0 + 5 \times 11^1 + 10 \times 11^2 + 1 \times 11^3 = 2598 \\
 2598 &= 7 \times 371 + 1 \\
 371 &= 7 \times 53 + 0 \\
 53 &= 7 \times 7 + 4 \\
 7 &= 7 \times 1 + 0
 \end{aligned}$$

أي:  $2598 = \overline{10401}^{(7)} = \overline{1\alpha 52}^{(11)}$

العدد 7431 مكتوب في الأساس 8، أكتب نفس العدد في الأساس 2.

$$\begin{aligned}
 7431 &= 1 \times 8^0 + 3 \times 8^1 + 4 \times 8^2 + 7 \times 8^3 \\
 &= 1 + (1+2) \times 2^3 + 2^2 \times 2^6 + (1+2+2^2) \times 2^9 \\
 &= 1 + 2^3 + 2^4 + 2^8 + 2^9 + 2^{10} + 2^{11} \\
 &= 1 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^4 + \\
 &\quad + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^6 + 0 \times 2^7 + 1 \times 2^8 + 1 \times 2^9 + 1 \times 2^{10} + 1 \times 2^{11} \\
 &\quad \overline{7431}^{(8)} = \overline{111100011001}^{(2)} \text{ أي:}
 \end{aligned}$$

تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية.

## مبرهنة 4

كل عدد طبيعي غير أولي  $n$  وأكبر من 1، يقبل تحليلاً وحيداً إلى جداء

عوامل أولية. ويكتب بالشكل:  $n = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \dots \times p_m^{a_m}$

حيث:  $p_1, p_2, \dots, p_m$  أعداد أولية متميزة و  $a_1, a_2, \dots, a_m$  أعداد طبيعية غير معلومة. ( $m$  عدد طبيعي).

## التعداد

## مبرهنة 5

$x$  عدد طبيعي أكبر من 1.

كل عدد طبيعي  $n$  يكتب بطريقة واحدة وواحدة فقط على الشكل:

$$n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_px^p$$

حيث:  $a_p \neq 0$  و  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_p$  أعداد طبيعية تحقق:

$$0 \leq a_h < x \text{ من أجل كل عدد طبيعي } h \text{ حيث } h < p$$

هذه الكتابة للعدد  $n$  تدعى نشر العدد  $n$  وفق الأساس  $x$ . ونرمز:

$$\overline{n}^{(x)} = a_p \dots a_2 a_1 a_0$$

## للحفظ

- كل عدد طبيعي أصغر من الأساس  $x$  يدعى رقماً في الأساس  $x$ .
- في نظام التعداد ذي الأساس 2 الرقمان هما: 0، 1.
- في نظام التعداد ذي الأساس 10 الأرقام هي: 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9.
- في نظام التعداد ذي الأساس 11 الأرقام هي: 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9،  $\alpha$  (يتمثل 10).
- في نظام التعداد ذي الأساس 12 الأرقام هي: 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9،  $\alpha$ ،  $\beta$  (يتمثل 11).

## تارين محلولة

## الموافقة العددية

1 عَيِّن الأعداد الطبيعية  $n$  بحيث يكون العدد  $2^n - 1$  يقبل القسمة على 17.

الحل: ندرس حسب قيم العدد الطبيعي  $n$  البواقي الممكنة في القسمة الإقليدية للعدد  $2^n$  على 17.

نجد:  $2^0 \equiv 1 [17]$  ،  $2^1 \equiv 2 [17]$  ،  $2^2 \equiv 4 [17]$  ،  $2^3 \equiv 8 [17]$  ،  $2^4 \equiv 16 [17]$  ،  $2^5 \equiv 15 [17]$  ،  $2^6 \equiv 13 [17]$  ،  $2^7 \equiv 9 [17]$  ،  $2^8 \equiv 1 [17]$  ...

من خواص الموافقة ينتج أن البواقي دورية ودورها 8، إذاً:  $2^n \equiv 1 [17]$  يكافئ أن  $n = 8k$  حيث  $k \in \mathbb{N}$

## الموافقة العددية

2 عَيِّن الباقي في القسمة الإقليدية لـ:  $56^{66}$  على 5 ،  $155^{13}$  على 3 ،  $2007^{2008}$  على 9 ،  $2006^{2008}$  على 2007.

الحل:  $56 \equiv 1 [5]$  منه  $56^{66} \equiv 1^{66} [5]$  أي  $56^{66} \equiv 1 [5]$  إذا باقي القسمة الإقليدية للعدد  $56^{66}$  على 5 هو 1.

$155 \equiv 2 [3]$  منه  $155^{13} \equiv 2^{13} [3]$  إذا للعدد  $155^{13}$  نفس باقي القسمة على 3.  $2^0 \equiv 1 [3]$  ،  $2^1 \equiv 2 [3]$  ،  $2^2 \equiv 1 [3]$  من خواص الموافقة ينتج أن البواقي دورية ودورها 2، ولدينا:  $2^{13} = 2^{2 \times 6 + 1} \equiv 2 [3]$  فإن  $2^{13} \equiv 2 [3]$  . إذا باقي القسمة الإقليدية للعدد  $155^{13}$  على 3 هو 2.  $2008 \equiv 1 [9]$  منه  $2008^{2007} \equiv 1^{2007} [9]$  أي  $2008^{2007} \equiv 1 [9]$  إذا باقي القسمة الإقليدية للعدد  $2008^{2007}$  على 9 هو 1.

$2006^0 \equiv 1 [2007]$  ،  $2006^1 \equiv 2006 [2007]$  ،  $2006^2 \equiv 2 [2007]$  ،  $2006^3 \equiv 0 [2007]$  ...

من خواص الموافقة ينتج أنه: من أجل كل عدد طبيعي  $n$  أكبر من 2 لدينا:

$2007 \equiv 0 [2007]$  و بالتالي باقي قسمة  $2006^{2008}$  على 2007 هو 0.

## خوارزمية اقليدس- مبرهنتي بيرو و غوص

3 بَيِّن أن المعادلة  $53x + 25y = 1$  تقبل حلاً في  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ، ثم حل هذه المعادلة.

الحل: باستعمال خوارزمية اقليدس نجد:  $53 = 25 \times 2 + 3$  و  $25 = 3 \times 8 + 1$

و  $3 = 1 \times 3 + 0$  إذا آخر باقي غير معدوم في هذه القسومات هو 1. يعني

$\text{PGCD}(53; 25) = 1$  ( يمكن ترتيب العمليات في جدول )

أي العددين 53 و 25 أوليان فيما بينهما. وبالتالي حسب بيرو توجد على الأقل ثنائية  $(\alpha; \beta)$  من  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  تحقق المعادلة  $53\alpha + 25\beta = 1$ . هذه الثنائية  $(\alpha; \beta)$  تعتبر حلاً للمعادلة المطلوبة. (ثنائية بيرو ليست وحيدة)

لحل المعادلة نوجد حلاً خاصاً باستعمال خوارزمية اقليدس كما يلي:  $1 = 25 - 3 \times 8$  أي

$$1 = 25 - (53 - 25 \times 2) \times 8$$

وبالتالي:  $1 = 53 \times (-8) + 25 \times (17)$  يعني أن الثنائية  $(-8; 17)$  حلاً خاصاً للمعادلة.

نوجد إذاً جميع الحلول كما يلي:

من الكتاتين  $53x + 25y = 1$  و  $53x + 25y = 1$  وبالمطرح طرف من طرف نحصل على:  $53(x + 8) = 25(-y + 17)$  هذا يعني أن 25 يقسم العدد  $53(x + 8)$  وبما أن

53 و 25 أوليان فيما بينهما (حسب ما سبق) فحسب غوص 25 يقسم  $(x + 8)$

أي  $(x + 8) = 25k$  حيث  $k \in \mathbb{Z}$  إذاً  $x = 25k - 8$

لإيجاد قيم  $y$  نعوض  $x$  بقيمة في المعادلة  $53x + 25y = 1$  فنجد بعد الحساب:  $y = -53k + 17$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة المطلوبة هي:  $\{(25k - 8; -53k + 17) / k \in \mathbb{Z}\}$ .

## التحليل إلى جداء عوامل أولية

4 أوجد الثنائيات  $(x; y)$  من المجموعة  $N \times N$  والتي تحقق المعادلة:

$$x^2 - y^2 = 2^2 \times 23^2$$



إذا كان  $d = 7$  فإن:  $a' + b' = 83$  و  $d \times b' = 240$  يعني  $a'$  و  $b'$  حلّي المعادلة:  $x^2 - 83x + 240 = 0$  وبالتالي:  $a' = 80$  و  $b' = 3$  منه:  $a = 560$  و  $b = 21$ .  
إذا كان  $d = 1$  فإن:  $a' + b' = 581$  و  $d \times b' = 240$  مستحيل.  
خلاصة: العددين المطلوبان هما: 560 و 21.

## التعداد

6	$n$ عدد طبيعي، يكتب في الأسس $x$ بالشكل 1254، ويكتب العدد $2n$ في نفس الأسس $x$ بالشكل 2541. عَيّن $x$ . أكتب العدد $n$ في الأسس 10، ثم اكتب العدد $3n$ في الأسس $x$ .
---	---

الحل: لدينا:  $n = 4 + 5x + 2x^2 + x^3$  و  $2n = 1 + 4x + 5x^2 + 2x^3$   
تنتج المعادلة التالية:  $x^2 - 6x - 7 = 0$

ذات المجهول الطبيعي  $x$  حيث:  $x > 5$ . حلّي المعادلة هما: -1 و 7 إذاً  $x = 7$ .  
يعني  $n$  يكتب 480 في الأسس 10.  $n = \overline{1254}^{(7)} = 4 + 5 \times 7 + 2 \times 7^2 + 1 \times 7^3 = 480$

$3n$  يكتب 1440 في الأسس 10 ثم يحوّل إلى الأسس 7.

$$1440 = 7 \times 205 + 5$$

$$3n = \overline{4125}^{(7)} \text{ أي } 205 = 7 \times 29 + 2$$

$$29 = 7 \times 4 + 1$$

## تمارين للتدريب

1. القسمة الإقليدية للعدد الطبيعي  $a$  على كل من العددين 155 و 161 تعطي نفس

الحاصل، والباقيان على الترتيب 65 و 23. تعرّف على العدد  $a$ .

2. ماهي البواقي الممكنة في القسمة الإقليدية لعدد طبيعي فردي على 4؟

بيّن أنه إذا كان  $n$  عدد طبيعي فردي فإن العدد  $n^2 - 1$  يقبل القسمة على 8.

3. عَيّن البواقي الممكنة في القسمة الإقليدية لمربع عدد صحيح على 8.

الحل: لدينا:  $x^2 - y^2 = 2^2 \times 23^2$  تكافئ  $(x-y)(x+y) = 2^2 \times 23^2$  يعني أن كلا من العددين  $(x-y)$  و  $(x+y)$  يقسم العدد  $2^2 \times 23^2$  علماً أن:  $0 < x-y \leq x+y$  و  $(x-y)$  زوجيان معاً أو فرديان معاً.  
نوجد أولاً قواسم العدد  $2^2 \times 23^2$  وهي من الشكل  $2^n \times 23^m$  حيث:  $n \in \{0;1;2\}$  و  $m \in \{0;1;2\}$  هذه القواسم هي:

1; 2; 4; 23; 46; 92; 529; 1058; 2116 وباستعمال الشرط السابق نحصل على الجملتين التاليتين:

$$\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=1058 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x-y=46 \\ x+y=46 \end{cases} \text{ وبعد حلّها نجد الثنائيات } (x,y) \text{ المطلوبة وهي: } (530;528) \text{ و } (46;0).$$

## العلاقة بين PGCD و PPMC

5	أوجد عددين علماً أن مجموعهما 581 وحاصل قسمة مضاعفيهما المشترك الأصغر على قاسميهما المشترك الأكبر هو 240.
---	--

الحل: نبحث عن عددين  $a$  و  $b$  بحيث:  $a+b=581$  و

$$PPCM(a,b) = 240 \times PGCD(a,b)$$

$$\text{علماً أن: } PGCD(a,b) \times PPCM(a,b) = ab \text{ وأن: } PGCD(a,b) = d$$

$$\text{معناه: } \frac{a}{d} \text{ و } \frac{b}{d} \text{ أوليان فيما بينهما}$$

فإن الشرط الثاني يكتب:  $d \times b' = 240$  و  $d \times a' = a$  و  $b = d \times b'$  و

$$PGCD(a',b') = 1$$

نبحث أولاً عن عددين  $a'$  و  $b'$  بحيث:  $d(a'+b') = 581$  و  $d \times b' = 240$  و

$$PGCD(a',b') = 1$$

الشرط الأول يعطي قيم  $d$  الممكنة وهي قواسم 581 الذي يكتب  $7 \times 83$  إذاً:

$$d \in \{1;7;83;581\}$$

مناقشة: إذا كان  $d = 581$  فإن:  $a' + b' = 1$  و  $d \times b' = 240$  مستحيل.

## 2- الدوال العددية

### Hard equation

ما يجب أن يعرف:

★ عموميات

في كامل هذا المحور، نتعامل مع الدوال العددية للمتغير الحقيقي، يعني دوال تأخذ متغيراتها من جزء في  $R$  (تدعى مجموعة البدء) وتضع قيمها في جزء من  $R$  (تدعى مجموعة الوصول).

♦ مجموعة التعريف

**تعريف** مجموعة تعريف الدالة  $f$  هي جزء من مجموعة البدء وتضم الأعداد التي لها صورة في مجموعة الوصول بالدالة  $f$ . ونرمز لها:  $D_f$ .

♦ التمثيل البياني

**تعريف** في المستوي المنسوب إلى المعلم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، التمثيل البياني

للدالة  $f$  هو مجموعة النقط  $M$  من المستوي والتي إحداثياتها  $(x; y)$

تحقق:  $x \in D_f$  و  $y = f(x)$  **معادلة ديكرانية للتمثيل الساني**

♦ الشفعية - الدورية

(الدالة  $f$  زوجية) يعني أنه (من أجل كل  $x$  من  $D_f$ :  $-x \in D_f$  و  $f(-x) = f(x)$ )

(الدالة  $f$  فردية) يعني أنه (من أجل كل  $x$  من  $D_f$ :  $-x \in D_f$  و  $f(-x) = -f(x)$ )

(الدالة  $f$  دورية ودورها  $p$ ) يعني أنه (من أجل كل  $x$  من  $D_f$ :  $(x+p) \in D_f$  و

$(x-p) \in D_f$  و  $f(p+x) = f(x)$ ) . (  $p$  عدد حقيقي موجب تماماً )

عَيِّن الأعداد الصحيحة  $n$  التي تحقق:  $(n+3)^2 \equiv 1 [8]$ .

4.  $n$  عدد طبيعي.

1. أوجد حسب قيم العدد  $n$  البواقي الممكنة في قسمة العدد  $5^n$  على 13.

2. استنتج أن العدد  $2007^{2008} - 1$  يقبل القسمة على 13.

3. يَبَيِّن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معلوم، العدد  $31^{4n+1} + 44^{4n-1}$  يقبل القسمة على 13.

5. يَبَيِّن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ، العددين التاليين أوليان فيما بينهما، في كل حالة:

(1):  $n+2$  و  $n+3$ ، (2):  $7n+2$  و  $4n+1$ ، (3):  $n(2n+1)$  و  $n+1$ ، (4):  $2n+1$  و  $3n+1$ .

6.  $n$  عدد طبيعي غير معلوم، نضع:  $a = 4n+3$  و  $b = 5n+2$  و  $d = \text{PGCD}(a; b)$

1. أعط قيمة  $d$  في كل حالة من الحالات الثلاث التالية:  $n=1$ ،  $n=11$ ،  $n=15$ .

2. احسب العدد  $5a - 4b$  واستنتج قيم  $d$  الممكنة.

3. عَيِّن العددين الطبيعيين  $n$  و  $k$  بحيث:  $4n+3=7k$ ، ثم العددين الطبيعيين  $n$  و  $k'$

بحيث:  $5n+2=7k'$ .

7. حل في المجموعة  $N \times N$  كلا من المعادلات التالية:

(1):  $x^2 - y^2 = 77$ ، (2):  $x^2 - y^2 = 36$ ، (3):  $x^2 - y^2 = 165$ ، (4):  $xy - 3y - 24 = 0$ .

8.  $a$  و  $b$  عددين طبيعيين غير معدومين، نضع:  $d = \text{PGCD}(a; b)$  و  $m = \text{PPCM}(a; b)$

تعرف على جميع الثنائيات  $(a; b)$  التي تحقق:  $m = d^2$  و  $d + m = 156$  و  $a \geq b$ .

9. لا يملك نسيم إلا قطعاً نقدية ذات  $20DA$  وأوراقاً نقدية ذات  $100DA$ . علماً أن لديه

مبلغ  $300DA$ . كم قطعة وكم ورقة نقدية لنسيم؟

10. نضع:  $a \in Z$  و  $b \in Z^*$

1. نفرض أن  $\text{PGCD}(a; b) = 1$ ، يَبَيِّن باستعمال مبرهنة بيزو أن:  $\text{PGCD}(a; b^2) = 1$

و  $\text{PGCD}(a^2; b^2) = 1$

واستنتج أن:  $\text{PGCD}(a; b) = 1$  يكافئ  $\text{PGCD}(a^2; b^2) = 1$

2. نعتبر  $x$  عدد صحيح.

• انشر العبارة:  $(x^2 + x - 1)^2$ ، وحلل العبارتين:  $x^2 + x - 2$  و  $x^2 + 4x + 4$ .

• عَيِّن الأعداد الصحيحة  $x$  بحيث يكون الكسر  $\frac{x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1}{x^2 + 4x + 4}$  قابلاً للاختزال.

## للحفظ

- إذا كانت الدالة  $f$  زوجية فإن محور الترتيب في المعلم المتعامد هو محور تناظر لتمثيلها البياني.
- إذا كانت الدالة  $f$  فردية فإن مبدأ المعلم هو مركز تناظر لتمثيلها البياني.
- إذا كانت الدالة  $f$  دورية ودورها  $p$ ، فإن تمثيلها البياني صامد إجمالاً بالانسحابات التي شعاعها  $pki$  حيث  $(k \in \mathbb{Z})$

## ♦ تركيب دالتين

## تعريف

نعتبر  $E$ ،  $F$  و  $G$  ثلاثة أجزاء من  $R$ .  
إذا كانت الدالة  $f$  من  $E$  نحو  $F$  وكانت الدالة  $g$  من  $F$  نحو  $G$ ، فإن الدالة  $g \circ f$  تدعى مركب الدالتين  $f$  و  $g$  بهذا الترتيب وهي من  $E$  نحو  $G$   
معروفة بـ:  $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ .  
ولدينا:  $x \in D_{g \circ f}$  يكافئ  $(x \in D_f \text{ و } f(x) \in D_g)$

## ♦ اتجاه تغيير دالة

## تعريف

$f$  دالة عددية معرفة على المجال  $I$   
|  $f$  متزايدة تماماً على  $I$  | يكافئ  
| من أجل كل  $x_1$  و  $x_2$  من  $I$ ، إذا كان  $x_1 < x_2$  فإن  $f(x_1) < f(x_2)$  |  
|  $f$  متناقصة تماماً على  $I$  | يكافئ  
| من أجل كل  $x_1$  و  $x_2$  من  $I$ ، إذا كان  $x_1 < x_2$  فإن  $f(x_1) > f(x_2)$  |  
|  $f$  متزايدة على  $I$  | يكافئ  
| من أجل كل  $x_1$  و  $x_2$  من  $I$ ، إذا كان  $x_1 < x_2$  فإن  $f(x_1) \leq f(x_2)$  |  
|  $f$  متناقصة على  $I$  | يكافئ  
| من أجل كل  $x_1$  و  $x_2$  من  $I$ ، إذا كان  $x_1 < x_2$  فإن  $f(x_1) \geq f(x_2)$  |  
|  $f$  ثابتة على  $I$  | يكافئ  
| من أجل كل  $x_1$  و  $x_2$  من  $I$ ،  $f(x_1) = f(x_2)$  |

## للحفظ

- $f$  و  $g$  دالتان معرفتان على نفس المجال  $I$ .
- إذا كان للدالتين  $f$  و  $g$  نفس اتجاه التغيير فإن  $g \circ f$  تكون متزايدة على  $I$ .
- إذا كان للدالتين  $f$  و  $g$  اتجاهات متعاكسين فإن  $g \circ f$  تكون متناقصة على  $I$ .

## ♦ القيم الحدية لدالة

## تعريف

$f$  دالة عددية معرفة على المجموعة  $D$  من  $R$  و  $x_0$  عنصر من  $D$ .  
الدالة  $f$  تقبل قيمة حدية عظمية عند  $x_0$  يكافئ من أجل كل  $x$  من  $D$ ،  
 $f(x) \leq f(x_0)$ .  
الدالة  $f$  تقبل قيمة حدية صغرى عند  $x_0$  يكافئ من أجل كل  $x$  من  $D$ ،  
 $f(x) \geq f(x_0)$ .  
الدالة  $f$  تقبل قيمة حدية عظمية محلية عند  $x_0$  يكافئ يوجد مجال  $I$  من  $D$  يضم  $x_0$  بحيث، من أجل كل  $x$  من  $I$ ،  $f(x) \leq f(x_0)$ .  
الدالة  $f$  تقبل قيمة حدية صغرى محلية عند  $x_0$  يكافئ يوجد مجال  $I$  من  $D$  يضم  $x_0$  بحيث، من أجل كل  $x$  من  $I$ ،  $f(x) \geq f(x_0)$ .  
في هذه التعاريف،  $f(x_0)$  تدعى قيمة حدية للدالة  $f$  عند  $x_0$ .

## نمايات دوال مألوقة

## ★ النهايات

الدوال $n \in \mathbb{N}^*$	$x \mapsto x^n$	$x \mapsto \sqrt[n]{x}$	$x \mapsto  x $	$x \mapsto \frac{1}{x^n}$
مجموعة التعريف	$R$	$R_+$	$R$	$R^*$
النهاية عند $+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$0^+$
النهاية عند $-\infty$	$+\infty$ و $-\infty$ ف	غير موجود	$+\infty$	$0^+$ و $0^-$ ف
النهاية عند $x_0$ $x_0 \in R$	$x_0^n$	$\sqrt[n]{x_0}$ حيث $x_0 \geq 0$	$ x_0 $	حالة $x_0 = 0$ $+\infty$ و $-\infty$ ف



نهایات حاصل القسمة ( في حالة نهاية  $g$  معدومة )

نهاية $f$ هي	$l > 0$ أو $+\infty$	$l < 0$ أو $-\infty$	$l > 0$ أو $+\infty$	$l < 0$ أو $-\infty$	$l = 0$
نهاية $g$ هي	$0^+$	$0^+$	$0^-$	$0^-$	$0$
نهاية $\left(\frac{f}{g}\right)$ هي	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	غير معينة

نهایات شهيرة

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

المستقيمات المقاربة

الرمز  $\alpha$  يشير إلى  $+\infty$  أو  $-\infty$ .  $f$  و  $g$  دالتان عدديتان معرفتان على الأقل على أحد المجالين  $]a; +\infty[$  أو  $]-\infty; a[$   $(C_f)$  و  $(C_g)$  تمثيلهما البيانيان.

تعريف

التمثيلان البيانيان  $(C_f)$  و  $(C_g)$  متقاربان عند  $\alpha$  يكافئ

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} [f(x) - g(x)] = 0$$

نتائج

المستقيم الذي معادلته  $y = mx + p$  مقارب للمنحنى  $(C_f)$  عند  $\alpha$  معناه

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} [f(x) - (mx + p)] = 0$$

إذا كان  $m \neq 0$  فإن المستقيم المقارب يكون مائلاً.إذا كان  $m = 0$  فإن المستقيم المقارب معادلته  $y = p$  يكون مواز

لحامول محور الفواصل.

إذا كان  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \alpha$  فإن المستقيم الذي معادلته  $x = x_0$  مقاربللمنحنى  $(C_f)$  ويوازي حامل محور الترتيب.

★ الاستمرارية

تعريف

 $f$  دالة عددية معرفة على المجال المفتوح  $I$  من  $R$  و  $x_0$  عنصر من  $I$ .•  $f$  مستمرة عند  $x_0$  معناه  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .•  $f$  مستمرة عند  $x_0$  من اليمين معناه  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ .•  $f$  مستمرة عند  $x_0$  من اليسار معناه  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ .

مبرهنة

 $f$  مستمرة عند  $x_0$  معناه  $f$  مستمرة عند  $x_0$  من اليمين ومن اليسار.

◆ امتداد دالة بالاستمرار

 $f$  دالة معرفة ومستمرة على المجموعة  $D$  و  $x_0$  عدد حقيقي حيث:  $x_0 \notin D$  و  $l$  عدد حقيقيإذا كانت  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ ، فإن الدالة  $g$  المعرفة على  $D \cup \{x_0\}$  بما يلي: $g(x) = f(x)$  من أجل  $x \in D$  و  $g(x_0) = l$  تدعى امتداداً للدالة  $f$  بالاستمرار عند  $x_0$ .

للحفظ

 $f$  و  $g$  دالتان مستمرتان على المجموعة  $D$  (عند كل  $x_0$  من  $D$ ).• الدالتان  $(f+g)$  و  $(f \times g)$  مستمرتان على  $D$ .• إذا كانت  $g$  لا تتعلم على  $D$  فإن: الدالتان  $\frac{1}{g}$  و  $\frac{f}{g}$  مستمرتان على  $D$ .• إذا كانت  $u$  مستمرة عند  $x_0$  وكانت  $v$  مستمرة عند  $u(x_0)$  فإنالدالة  $(v \circ u)$  مستمرة عند  $x_0$ .• الدوال:  $|\sqrt{f}|$ ،  $\sin f$ ،  $\cos f$ ،  $\tan f$  مستمرة على مجموعة تعريفها.



الدالة  $h \mapsto f(x_0) + hf'(x_0)$  تدعى تقريب تآلفي للدالة  $h \mapsto f(x_0 + h)$  بجوار 0.

## للحفظ

لدينا  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  ونكتب كذلك

$$f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (\text{بوضع } x - x_0 = h)$$

الكتابة التفاضلية  $dy = f'(x)dx$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{لدينا}$$

مع:  $\Delta_x = f(x_0 + h) - f(x_0)$  و  $\Delta_x = h$  تكتب العلاقة (1) بالشكل:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta(h) = 0 \quad \text{و} \quad f'(x_0) = \frac{\Delta_x}{\Delta_x} + \theta(h) \quad \text{أي} \quad f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_x}{\Delta_x}$$

$$\lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \theta(\Delta_x) = 0 \quad \text{و} \quad \Delta_x = f'(x_0)\Delta_x - \Delta_x \theta(\Delta_x) \quad \text{يعني}$$

عندما يكون المقدار  $\Delta_x$  قريب من الصفر، يكون لدينا:  $\Delta_x \approx f'(x_0)\Delta_x$  ونرمز بـ:  $\frac{\Delta_x}{\Delta_x} = f'(x_0)$

$$\text{ويمكننا أن نستعمل الرمز: } \frac{\Delta_x}{\Delta_x} \text{ بدل الرمز } f' \text{، ونكتب: } f'(x_0) = \frac{\Delta_x}{\Delta_x}$$

## الدالة المشتقة

## تعريف

$f'$  دالة عددية معرفة على المجموعة  $D$  وقابلة للاشتقاق على المجموعة  $D'$

(عند كل قيمة  $x_0$  من  $D'$ ) حيث:  $D' \subset D$

الدالة التي ترفق بكل عدد  $x$  من  $D'$ ، العدد المشتق  $f'(x)$  تدعى الدالة المشتقة الأولى

(أو المشتقة) للدالة  $f$ ، ويرمز لها:  $f'$ .

## نتيجة

إذا كانت الدالة  $f'$  بدورها تقبل الاشتقاق على  $D''$

حيث:  $D' \subset D$ ، فباستعمال التعريف السابق توجد الدالة المشتقة للدالة  $f'$  يرمز

لها  $f''$  وتدعى الدالة المشتقة الثانية للدالة  $f$ .

بنفس الطريقة يمكننا الحديث عن الدالة المشتقة الثالثة، الرابعة، ... للدالة  $f$ .

## ◆ مبرهنة القيم المتوسطة

## مبرهنة

إذا كانت الدالة  $f$  مستمرة على المجال  $[a; b]$ ، فإنه من أجل كل عدد حقيقي  $k$  من المجال  $K$  الذي حداه  $f(a)$  و  $f(b)$ ، المعادلة  $f(x) = k$  تقبل على الأقل حلاً في المجال  $[a; b]$ .

ملحوظة: إضافة إلى  $f$  مستمرة في  $[a; b]$ ، إذا كانت  $f$  رتيبة تماماً على  $[a; b]$  فإن للمعادلة  $f(x) = k$  حلاً وحيداً.

تعمم هذه المبرهنة في حالة  $f$  مستمرة على مجال مفتوح أو نصف مفتوح، محدود أو غير محدود، في هذه الحالة حدا المجال  $K$  يمكن أن يكونا نهايات  $f$  عند طرفي  $[a; b]$ .

## ★ الاشتقاقية

## ◆ العدد المشتق

## تعريف

$f'$  دالة عددية معرفة على المجال المفتوح  $I$  من  $R$  و  $x_0$  عنصر من  $I$ .

$f'$  تقبل الاشتقاق عند  $x_0$  إذا وفقط إذا تحقق أحد الشروط الثلاثة المتكافئة التالية:

• يوجد عدد حقيقي  $k$  و دالة  $\varepsilon$  معرفة على  $I$  بحيث:

$$f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x), \quad I \text{ من } x \text{ كل}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0 \quad \text{و}$$

• يوجد عدد حقيقي  $k$  و دالة  $\theta$  معرفة على  $I$  بحيث:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hk + h\theta(h), \quad I \text{ من } h \text{ كل}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta(h) = 0 \quad \text{و}$$

• الدالة  $g$  المعرفة على  $I - \{x_0\}$  بـ:  $g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  تقبل نهاية

محدودة  $k$  عند  $x_0$ .

العدد الحقيقي  $k$  يدعى العدد المشتق للدالة  $f$  عند  $x_0$  ونرمز:  $f'(x_0) = k$

الدالة	مجموعة تعريفها	مجموعة قابلية اشتقاقها	دالتها المشتقة
$x \mapsto \sqrt{x}$	$R_+$	$R_+^*$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \mapsto \sin x$	$R$	$R$	$x \mapsto \cos x$
$x \mapsto \cos x$	$R$	$R$	$x \mapsto -\sin x$
$x \mapsto \tan x$	$R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$	$R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$	$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$

العمليات على الدوال المشتقة

$f$  و  $g$  دالتان قابلتان للاشتقاق على المجموعة  $D$ .

الدالة	الدالة المشتقة	الشروط
$f + g$	$f' + g'$	$I$
$kf$	$kf'$	$k \in R^*$
$fg$	$f'g + g'f$	$I$
$\frac{1}{f}$	$-\frac{f'}{f^2}$	$f \neq 0$ على كامل $D$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g - g'f}{g^2}$	$g \neq 0$ على كامل $D$
$x \mapsto f(ax+b)$	$x \mapsto af'(ax+b)$	$a \in R^*$ و $b \in R$
$x \mapsto f[h(x)]$	$x \mapsto h'(x) \times f'[h(x)]$	$h$ دالة نقل الاشتقاق على $E$ حيث: $h(E) \subset D$
$f^n$	$nf''f^{n-1}$	$n \in \mathbb{Z}^*$ و $f$ لا تعتمد من أجل $n < 0$
$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	$f$ موجبة تماما على كامل $D$

الدوال كثير الحدود والناطقة تقبل الاشتقاق على مجموعة تعريفها

## مبرهنة

إذا كانت دالة قابلة للاشتقاق على المجموعة  $D$ ، فإن هذه الدالة مستمرة على  $D$ .

عكس هذه المبرهنة غير صحيح

إنته

◆ معادلة المماس للمنحني

## تعريف

إذا كانت الدالة  $f$  تقبل الاشتقاق عند  $x_0$ ، فإن المستقيم  $\Delta$  الذي

معادلته  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$  يدعى المماس للمنحني الممثل للدالة

$f$  عند النقطة ذات الفاصلة  $x_0$ .  $f''(x_0)$  يدعى معامل توجيه المماس  $\Delta$ .

ملاحظة:  $f$  دالة عددية معرفة على المجال المفتوح  $I$  من  $R$  و  $x_0$  عنصر من  $I$ .

إذا كانت الدالة  $g$  المعرفة على  $I - \{x_0\}$  بـ:  $g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  تقبل نهاية

غير محدودة ( $+\infty / -\infty$ ) عند  $x_0$ ، (أو عند  $x_0^+ / x_0^-$ ).

فإن الدالة  $f$  لا تقبل الاشتقاق عند  $x_0$  وتمثيلها البياني يقبل مماسا (نصف مماس) عند

النقطة ذات الفاصلة  $x_0$ ، يوازي حامل محور الترتيب.

◆ مشتقات الدوال المألوفة

الدالة	مجموعة تعريفها	مجموعة قابلية اشتقاقها	دالتها المشتقة
$x \mapsto k$	$R$	$R$	$x \mapsto 0$
$x \mapsto x$	$R$	$R$	$x \mapsto 1$
$x \mapsto x^2$	$R$	$R$	$x \mapsto 2x$
$x \mapsto x^3$	$R$	$R$	$x \mapsto 3x^2$
$x \mapsto x^n$	$R$	$R$	$x \mapsto nx^{n-1}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$R^*$	$R^*$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}$	$R^*$	$R^*$	$x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$

المشتقة واتجاه تغير الدالة

## للحفظ

 $f$  دالة قابلة للاشتقاق على المجال  $I$ . $f$  متزايدة تماماً على  $I$  معناه من أجل كل  $x$  من  $I$ ،  $f'(x) > 0$ . $f$  متناقصة تماماً على  $I$  معناه من أجل كل  $x$  من  $I$ ،  $f'(x) < 0$ . $f$  ثابتة على  $I$  معناه من أجل كل  $x$  من  $I$ ،  $f'(x) = 0$ .ملاحظة:  $f'$  دالة قابلة للاشتقاق على المجال  $[a; b]$ .• إذا كان من أجل كل  $x$  من  $[a; b]$ ،  $f'(x) > 0$  فإن  $f$  متزايدة تماماً على  $[a; b]$ .• إذا كان من أجل كل  $x$  من  $[a; b]$ ،  $f'(x) < 0$  فإن  $f$  متناقصة تماماً على  $[a; b]$ .

العدد المشتق من اليمين ومن اليسار

 $f$  دالة عددية معرفة على المجال المفتوح  $I$  من  $\mathbb{R}$  و  $x_0$  عنصر من  $I$ .•  $f$  تقبل الاشتقاق من يمين  $x_0$  إذا وفقط إذا كانت الدالة  $\varphi$  المعرفة على  $I - \{x_0\}$  بـ:

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

تقبل الاشتقاق من يسار  $x_0$  إذا وفقط إذا كانت الدالة  $\varphi$  المعرفة على  $I - \{x_0\}$  بـ:

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

هو معامل توجيه نصف المماس للمنحنى الممثل للدالة  $f$  عند النقطة ذات الفاصلة  $x_0$ .هو معامل توجيه نصف المماس للمنحنى الممثل للدالة  $f$  عند النقطة ذات الفاصلة  $x_0$ .

## مبرهنة

 $f$  دالة عددية معرفة على المجال المفتوح  $I$  من  $\mathbb{R}$  و  $x_0$  عنصر من  $I$ . $f$  تقبل الاشتقاق عند  $x_0$  إذا وفقط إذا قبلت الاشتقاق من يمين  $x_0$  ومن

$$f'_d(x_0) = f'_g(x_0) \text{ وكان: } x_0 \text{ يسار}$$

## الدوال الأصلية

## تعريف

 $f$  و  $F$  دالتان معرفتان على المجال  $I$ . $F$  دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $I$ ، إذا وفقط إذا كانت الدالة  $F$  تقبلالاشتقاق على  $I$ ، و دالتها المشتقة هي  $f$ .

$$F'(x) = f(x) \text{ أي من أجل كل } x \text{ من } I$$

## للحفظ

مبرهنة: (وجود دوال أصلية لدالة)

كل دالة  $f$  مستمرة على المجال  $I$ ، تقبل على الأقل دالة أصلية  $F$  على  $I$ .

خاصة:

• إذا قبلت الدالة  $f$  على المجال  $I$  دالة أصلية  $F$ ، فإن الدالة  $f$  تقبل على  $I$  عدد غير

مته من الدوال الأصلية كلها من الشكل:

$$x \mapsto F(x) + k \text{ حيث } k \text{ عدد حقيقي}$$

• إذا قبلت الدالة  $f$  على المجال  $I$  دالة أصلية  $F$ ، فإنه من أجل كل ثنائية $(x_0; y_0)$  حيث  $x_0 \in I$  و  $y_0 \in \mathbb{R}$ ، توجد دالة أصلية  $F_0$  وحيدة للدالة $f$  على المجال  $I$  والتي تأخذ القيمة  $y_0$  عند  $x_0$ .

## الدوال الأصلية لدوال مألوفة

الدالة	شروط وجود الدوال الأصلية	الدوال الأصلية / $k \in \mathbb{R}$
$(a \in \mathbb{R}) / x \mapsto a$	$x \in \mathbb{R}$	$x \mapsto ax + k$
$x \mapsto x^n$	$x \in \mathbb{R}$ من أجل $n > 0$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$
$(n \in \mathbb{Z}^* - \{-1\})$	$x \in \mathbb{R}_+^*$ أو $x \in \mathbb{R}_-^*$ من أجل $n < 0$	
$x \mapsto x^n$	$x \in \mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$
$(n \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z})$		
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \in \mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + k$

## تمارين محلولة

## النهايات

احسب نهايات الدوال التالية عند أطراف مجالات تعريفها في كل حالة.

الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  بالدستور:  $f(x) = -4x^2 + x + 5$

الدالة  $g$  معرفة على  $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$  بالدستور:  $g(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

الدالة  $h$  معرفة على  $\mathbb{R}$  بالدستور:  $h(x) = \frac{3-x}{x^2+2}$

الدالة  $k$  معرفة على  $]0; +\infty[$  بالدستور:  $k(x) = x\sqrt{x + \frac{1}{x}}$

1

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^2) = -4(+\infty) = -\infty \quad \text{أجل:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-4x^2) = -4(+\infty) = -\infty \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^3}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \frac{-16}{0^-} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \frac{-16}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+2x+4}{x+2} = 3 \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{-x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{-1}{x} \right) = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-1}{x} \right) = 0^- \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = +\infty \sqrt{+\infty + 0} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 \left( x + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^3 + x} = 0$$

الكتابة  $\sqrt{x^2} = x$  تصح

فقط من أجل  $x \geq 0$ .

الدالة	شروط وجود الدوال الأصلية	الدوال الأصلية / $k \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \in \mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos x + k$
$x \mapsto \cos x$	$x \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \sin x + k$
$x \mapsto \sin(ax + b)$ $a \neq 0$	$x \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{-1}{a} \cos(ax + b) + k$
$x \mapsto \cos(ax + b)$ $a \neq 0$	$x \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{a} \sin(ax + b) + k$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2 x}$	$l \in \mathbb{Z} / x \in ]l\pi; (l+1)\pi[$	$x \mapsto \cot g x + k$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$	$l \in \mathbb{Z} / x \in \left] \frac{\pi}{2} + l\pi; \frac{\pi}{2} + (l+1)\pi \right[$	$x \mapsto \tan x + k$

## ◆ عمليات على الدوال الأصلية

دالة أصلية	الشروط	$f, g, f', g'$ دوال معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $I$
$af$	على $I$	$af'$ حيث $(a \in \mathbb{R})$
$f+g$	على $I$	$f' + g'$
$fg$	على $I$	$f'g + g'f$
$\frac{1}{f}$	على $I$ حيث $f \neq 0$	$-\frac{f'}{f^2}$
$\frac{f^{n+1}}{n+1}$	على $I$ من أجل $n > 0$ على $I$ حيث $f \neq 0$ من أجل $n < 0$	$n \in \mathbb{Z}^* - \{-1\} / ff^n$
$\frac{f^{n+1}}{n+1}$	على $I$ حيث $f > 0$	$n \in \mathbb{Q} - \{-1\} / ff^n$
$\sqrt{f}$	على $I$ حيث $f > 0$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
$g \circ f$	على $I$ و $f(I) \subset I$	$(g' \circ f) \times f'$

## قابلية الاشتقاق - حساب المشتقات

• ادرس قابلية اشتقاق الدالة  $f$  عند  $x_0$  في الحالتين:

$$x_0 = 0 \text{ و } f(x) = |x|, \quad x_0 = -1 \text{ و } f(x) = \sqrt{x+1}$$

• عيّن الدالة المشتقة لكل من الدوال التالية:

الدالة  $g$  معرفة على  $R$  بالدستور:  $g(x) = -4x^2 + x + 5$

الدالة  $h$  معرفة على  $R$  بالدستور:  $h(x) = x^2 \cos x$

الدالة  $k$  معرفة على  $R$  بالدستور:  $k(x) = (2x^2 + 5)^3$

الدالة  $l$  معرفة على  $R - \{-1; 1\}$  بالدستور:  $l(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$

الدالة  $p$  معرفة على  $R - \{-2\}$  بالدستور:  $p(x) = \frac{-x^2 + 5}{x + 2}$

الدالة  $q$  معرفة على  $R$  بالدستور:  $q(x) = \sqrt{x^2 + x + 2}$

2

## استعمال مبرهنة القيم المتوسطة

الدالة  $f$  معرفة على  $R$  بالدستور:  $f(x) = -x^3 - x + 5$

بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل على الأقل حلا في المجال  $[0; 2]$ .

هل هذا الحل وحيد؟

3

الحل: الدالة  $f$  مستمرة على  $R$  كونها كثير الحدود، وبالأخص على  $[0; 2]$ .

ولدينا:  $f(0) = 5$  و  $f(2) = -5$ . وبالتالي:  $f(0) \times f(2) < 0$

إذاً حسب مبرهنة القيم المتوسطة ( $k = 0$ )، فإن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل على الأقل حلا في المجال  $[0; 2]$ .

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $R$  كونها كثير الحدود، وبالأخص على  $[0; 2]$ .

لدينا:  $f'(x) = -3x^2 - 1$ ، إذاً من أجل كل  $x$  من  $R$ ،  $f'(x) < 0$  يعني  $f$  متناقصة تماماً على  $R$  وبالأخص على  $[0; 2]$ . وبالتالي الحل وحيد.

## محور التناظر لمنحن دالة

الدالة  $f$  معرفة على  $R$  بالدستور:  $f(x) = -x^2 - 4x + 1$

$(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

بين أن المستقيم الذي معادلته  $x = -2$  هو محور تناظر للمنحنى  $(C_f)$ .

4

الحل:  $f(x) = \sqrt{x+1}$  معرفة على  $[-1; +\infty[$ . إذاً ندرس قابلية الاشتقاق من يمين  $-1$  فقط.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h-1) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

يعني أن  $f$  لا تقبل الاشتقاق عند  $-1$ . كون النهاية غير محدودة.

$f(x) = |x|$  معرفة على  $R$ . ندرس قابلية الاشتقاق عند  $0$  من الجهتين.

$$\frac{f(h+0) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+0) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = -1 \quad \text{و} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+0) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = 1$$

يعني أن الدالة  $f$  تقبل الاشتقاق من يمين  $0$  و تقبل الاشتقاق من يسار  $0$  وبما أن

$f'_d(0) \neq f'_g(0)$  فإن  $f$  لا تقبل الاشتقاق عند  $0$ . هندسياً: المنحنى الممثل للدالة  $f$  يقبل

نصفي مماس عند النقطة ذات الفاصلة  $0$ .

من أجل كل  $x$  من  $R$ ،  $g'(x) = -8x + 1$

من أجل كل  $x$  من  $R$ ،  $h(x) = 2x \cos x - x^2 \sin x$



الحل: (الطريقة 1) نجري تغيير للمعلم من  $(0; \bar{t}; \bar{j})$  إلى  $(\Omega; \bar{t}; \bar{j})$  حيث:  $\Omega(-2; 0)$  وتستخرج معادلة للمنحنى  $(C')_f$  في المعلم الجديد، ثم نبين أنهما معادلة التمثيل البياني لدالة زوجية.

2. حول حساب النهايات.

الدالة $f$ معرفة بالدستور	أحسب نهايات $f$ عند
$f(x) = \frac{2x^2 + 5}{ x  - 1}$	$-\infty$ و $+\infty$ و $1$ و $-1$
$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 2x^2 + 1}$	$-\infty$ و $+\infty$ و $1$
$f(x) = \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3}$	$+\infty$ و $2$
$f(x) = \sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 1}$	$-\infty$ و $+\infty$
$f(x) = x + \sin x$	$-\infty$ و $+\infty$
$f(x) = \frac{\tan 2x}{\sqrt{1 - \cos x}}$	$0$

3. الدالة  $f$  معرفة على المجموعة  $[2; +\infty[ \cup ]-\infty; -2]$  بالدستور:

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 4}$$

اكتب معادلة لمماس المنحنى  $(C')_f$  الممثل للدالة  $f$  عند النقطة ذات الفاصلة  $-3$ .

أعط معادلة لكل من نصفي المماس للمنحنى  $(C')_f$  عند النقطتين ذات الفاصلتين  $-2$  و  $2$ .

4. المستوي منسوب إلى معلم متعامد  $(0; \bar{t}; \bar{j})$ .

الحل: (الطريقة 1) نجري تغيير للمعلم من  $(0; \bar{t}; \bar{j})$  إلى  $(\Omega; \bar{t}; \bar{j})$  حيث:  $\Omega(-2; 0)$  وتستخرج معادلة للمنحنى  $(C')_f$  في المعلم الجديد، ثم نبين أنهما معادلة التمثيل البياني لدالة زوجية.

$M$  نقطة من المستوي إحداثياتها  $(x; y)$  في المعلم  $(0; \bar{t}; \bar{j})$ ، وإحداثياتها  $(X; Y)$  في المعلم  $(\Omega; \bar{t}; \bar{j})$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} X = Y - 2 \\ Y = Y \end{array} \right. \quad \text{(تستخرج من العلاقة الشعاعية } \overline{(OM)} = \overline{(X\Omega)} + \overline{(\Omega M)} \text{)}$$

$$Y = -(Y-2)^2 - 4(Y-2) + 1 \quad \text{يكافئ} \quad Y = -Y^2 - 4Y + 1 \quad \text{معناه} \quad M \in (C')_f$$

أو

$$Y = -Y^2 + 5$$

الكتابة الأخيرة هي معادلة للمنحنى  $(C')_f$  في المعلم  $(\Omega; \bar{t}; \bar{j})$ .

نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $R$  بالدستور:  $g(x) = -x^2 + 5$

الدالة  $g$  زوجية كون: من أجل كل  $x$  من  $R$ ،  $-x \in R$  و  $g(-x) = g(x)$ .

وبالتالي المستقيم الذي معادلته  $x = -2$  هو محور تناظر للمنحنى  $(C')_f$ .

(الطريقة 2) نبين أنه من أجل كل  $x$  من  $R$ ،  $(-2-x) \in R$  و  $(-2+x) \in R$  و

$$f(-2+x) = f(-2-x) \quad \text{(تحقق من ذلك)}.$$

### تمارين للتدريب

1. الدالة  $f$  معرفة على المجموعة  $R - \{-2\}$  بالدستور:  $f(x) = \frac{5x-1}{2+x}$

احسب نهايات  $f$  عند أطراف مجالات التعريف، ثم استنتج أن هناك مستقيمتان مقاربة للمنحنى الممثل للدالة  $f$ ، يطلب معادلاتهما.

الدالة  $g$  معرفة على المجموعة  $R - \{1\}$  بالدستور:  $g(x) = \frac{-x^2 + 2x - 4}{x-1}$

بين أن المستقيم الذي معادلته  $y = -x + 1$  هو مستقيم مقارب للمنحنى الممثل للدالة  $g$ .

الدالة  $h$  معرفة على المجموعة  $R - \left\{\frac{1}{2}\right\}$  بالدستور:  $h(x) = \frac{6x^2 - 7x + 3}{2x-1}$

عين الأعداد الحقيقية  $a, b, c$  بحيث: من أجل كل  $x$  من  $R - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

7. الدالة  $f$  معرفة على المجموعة  $R - \{-1\}$  بالدستور:  $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - x}{(x+1)^2}$

عَيِّن الأعداد الحقيقية  $h, a, c$  حتى يكون، من أجل كل  $x$  من  $R - \{-1\}$ ،

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+1)^2}$$

استنتج الدالة الأصلية للدالة  $f$  على المجال  $]-1; +\infty[$  والتي تنعدم من أجل  $x = 1$ .

8. الدالة  $f$  معرفة على المجموعة  $R - \{-1; 0; 1\}$  بالدستور:  $f(x) = \frac{x^4 - 6x^2 + 1}{x^3 - x}$

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

• بَيِّن أنه توجد ثلاثة أعداد حقيقية  $h, a, c$  بحيث: من أجل كل  $x$

$$f(x) = x + \frac{a}{x} + \frac{h}{x-1} + \frac{c}{x+1}, \quad R - \{-1; 0; 1\}$$

• ادرس تغيرات الدالة  $f$ ، وعَيِّن المستقيمات المقاربة للمنحنى  $(C_f)$  وكذا مركز تناظره.

• حل المعادلتين:  $f(x) = 0$  و  $f(x) = x$  ثم أرسم  $(C_f)$ .

• نغَيِّر الدالة كثير الحدود  $g$  المعرفة على  $R$  بالدستور:

$$g(x) = x^4 - ax^3 - 6x^2 + ax + 1 \quad \text{و} \quad a \in R$$

تحقق - باستعمال النتائج السابقة حول تغيرات الدالة  $f$  - أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل

أربعة حلول حقيقية وذلك مهما كان العدد  $a$ .

9. الدالة  $f_m$  معرفة على المجموعة  $R$  بالدستور:  $f_m(x) = \frac{(x+m)(3x+10m)}{(x+2m)^2}$

حيث  $m$  وسيط حقيقي

$(C_m)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

ادرس تغيرات الدالة  $f_m$ ، وعَيِّن المستقيمات المقاربة للمنحنى  $(C_m)$ .

ادرس وضعية  $(C_m)$  بالنسبة للمستقيم المقارب للمنحنى  $(C_m)$  والموازي لحامل محور

لفواصل.

ما يمكن القول عن المنحنى  $(C_0)$ ؟

• الدالة  $f$  معرفة على المجموعة  $R$  بالدستور:  $f(x) = ax^2 + bx + c$  حيث:

$h, a, c$  وأعداد حقيقية.

عَيِّن الأعداد  $h, a, c$  حتى يكون:  $f(2) = 2, f(4) = -4, f'(4) = 0$ .

ادرس تغيرات الدالة  $f$  واسم تمثيلها البياني  $(C_f)$  في المجال  $[0; 8]$ .

• عَيِّن الدالة  $g$  كثير الحدود من الدرجة الثانية، علما أن المستقيم الذي معادلته

$$y = 2x - \frac{3}{2}$$

وأن  $g(2) = 2$ .

ادرس تغيرات الدالة  $g$  واسم تمثيلها البياني  $(C_g)$  في المجال  $[0; 8]$ .

ادرس الوضعية النسبية للمنحنيين  $(C_f)$  و  $(C_g)$  في المجال  $[0; 8]$ .

5. الدالة  $f$  معرفة على المجموعة  $R - \{0\}$  بالدستور:  $f(x) = x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

• بَيِّن أن الدالة  $f$  فردية.

• نسمي  $g$  اختصار للدالة  $f$  على المجال  $I = ]0; +\infty[$  و  $(C_g)$  تمثيلها البياني في المعلم السابق.

احسب نهايات  $g$  عند  $0$  و  $+\infty$ .

• بَيِّن أن الدالة  $g$  متزايدة على  $I$ .

• نضع:  $h(x) = g(x) - x$ . أحسب نهاية  $h$  عند  $+\infty$  وترجم هندسيا النتيجة.

• احسب  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) - 1}{x}$ . ما هو مسار المنحنى  $(C_g)$  بجوار النقطة ذات الإحداثيات  $(0; 1)$ ؟

• أنشئ المنحنيين  $(C_f)$  و  $(C_g)$ .

6. عَيِّن الدوال الأصلية للدالة  $f$  على المجال  $I$  في كل حالة:

$$I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[ \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{\cos x + x \sin x}{\cos^2 x}, \quad I = \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[ \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{1}{(2x+1)^3}$$

$$I = ]-2; +\infty[ \quad \text{و} \quad f(x) = x\sqrt{x+2}, \quad I = R \quad \text{و} \quad f'(x) = \cos^4 x \sin x$$

$$I = R \quad \text{و} \quad f(x) = \sin^3 x + \cos^2 x, \quad I = R \quad \text{و} \quad f(x) = \sin^5 x \cos^4 x$$

### 3- الدالة الأسية- الدالة اللوغاريتمية

Hard equation

ما يجب أن يعرف:

الدالة الأسية

تعريف

الدالة الأسية هي الدالة الوحيدة  $f$  التي تقبل الاشتقاق على  $R$  وتحقق

$$f'(x) = f(x) \text{ و } f(0) = 1.$$

يرمز لها  $\exp$  ونكتب:  $f(x) = \exp(x)$  أو  $f(x) = e^x$

وعموماً: من أجل  $k$  عدد حقيقي، توجد دالة وحيدة  $f$  تقبل الاشتقاق

على  $R$  وتحقق المعادلة  $f' = kf$  و  $f(0) = 1$ .

معرفة بالدستور:  $f(x) = e^{kx}$

للحفظ

$a, h, x$  ثلاثة أعداد حقيقية.

$$e^{a+h} = e^a \times e^h, \quad e^x > 0, \quad e^1 = e, \quad e^0 = 1$$

$$n \in \mathbb{Z} / e^{nx} = (e^x)^n, \quad e^{a-h} = \frac{e^a}{e^h}, \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

$$a < b \text{ يكافئ } e^a < e^b, \quad a = b \text{ يكافئ } e^a = e^b$$

الدالة  $\exp$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $R$ .

$$(e^x)' = e^x, \quad x \text{ من } R$$

إذا كانت  $f$  دالة قابلة للاشتقاق على  $D$  فإن الدالة  $e^f$  تقبل

$$(e^f)' = f' e^f. \text{ ولدينا: } (e^f)' = f' e^f$$

الدالة  $\exp$  متزايدة تماماً على  $R$ . بجوار  $0$ ,  $e^h \approx 1 + h$

خواص جبرية

خواص تحليلية

نفرض أن  $m \neq 0$ . ما هي إحداثيات  $I_m$  نقطة تقاطع المنحني  $(C_m)$  مع مستقيمه المقارب الأفقي؟

تعرف على مجموعة النقط  $I_m$  عندما تتغير  $m$ .

10. في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . نعتبر المثلث  $ABC$

المتساوي الساقين رأسه الأساسي  $A$ ، تحيط به الدائرة التي مركزها  $O$  ونصف قطرها 1.

النقطة  $B$  تقع فوق محور النواصل. يرمز  $H$  إلى المسقط العمودي للنقطة  $A$  على

الحامل  $(BC)$ .

العدد الحقيقي  $\alpha$  يمثل قياساً بالراديان للزاوية  $(\vec{i}; \overrightarrow{OB})$  حيث  $\alpha \in [0; \pi]$ .

. ما هي إحداثيات النقطة  $B$ ؟

عبّر عن الطولين  $BH$  و  $AH$  بدلالة  $\alpha$ .

استنتج مساحة المثلث  $ABC$  بدلالة  $\alpha$ .

. الدالة العددية المعرفة على المجال  $[0; \pi]$  بالدستور:  $f(x) = (1 + \cos x) \sin x$ .

أ- عيّن مشتقة الدالة  $f$ ، وبيّن أنه من أجل كل  $x$  من المجال  $[0; \pi]$ ،

$$f''(x) = 2 \cos^2 x + \cos x - 1$$

استنتج أنه من أجل كل  $x$  من المجال  $[0; \pi]$ ،  $f''(x) = (2 \cos x - 1)(\cos x + 1)$ .

ب- أدرس إشارة العدد  $f''(x)$ ، ثم ارسم جدول تغيرات الدالة  $f$ .

. بيّن أنه توجد قيمة للعدد  $\alpha$  من أجلها تكون مساحة المثلث  $ABC$  أكبر مما يمكن.

تعرف على هذه المساحة العظمى.

. ما هي إذاً طبيعة المثلث  $ABC$ ؟

**للحفظ**

الدالة  $\ln$  متزايدة تماماً على  $]0; +\infty[$ .

من أجل  $a$  و  $b$  عنصران من  $]0; +\infty[$  ،  $\ln a = \ln b$  ، يكافئ  $a = b$ .

$\ln a < \ln b$  ، يكافئ  $a < b$ .

حالة خاصة

$\ln a < 0$  ، يكافئ  $0 < a < 1$ .

$\ln a > 0$  ، يكافئ  $a > 1$ .

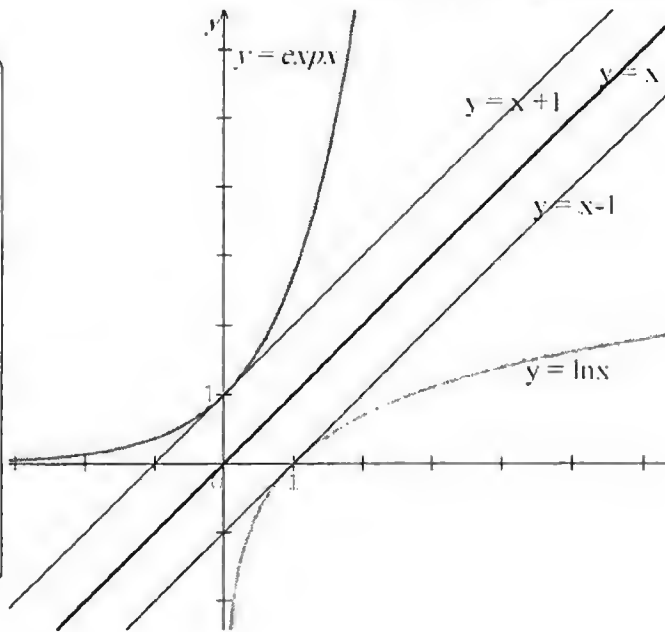
♦ التمثيل البياني للدالتين الأسية واللوغاريتم النيبيري

للدالتين الأسية واللوغاريتم النيبيري تمثيلان بيانيان متناظران بالنسبة

للمستقيم الذي معادلته  $y = x$  (المصف الأول) في المستوى المنسوب إلى معلم

متعامد ومتجانس  $(\vec{i}; \vec{j})$ .

$y = x + 1$  هي معادلة  
المستقيم المماس للمنحنى  
الممثل للدالة  $\exp$  عند  
النقطة ذات الفاصلة 0.  
 $y = x - 1$  هي  
معادلة المستقيم المماس  
للمنحنى الممثل للدالة  
 $\ln$  عند النقطة ذات  
الفاصلة 1.



★ الدالة اللوغاريتم النيبيري

**تعريف**

الدالة اللوغاريتم النيبيري ويرمز لها  $\ln$  هي دالة التقابل العكسي للدالة الأسية، ترفق بكل عدد حقيقي موجب تماماً  $x$  العدد الحقيقي  $\ln x$  والذي عدده الأسّي يساوي  $x$ .

أي من أجل  $x \in \mathbb{R}$  و  $y \in ]0; +\infty[$  :  $e^x = y$  ، يكافئ  $x = \ln y$

$e^{\ln x} = x$  و  $e^{\ln y} = y$

**للحفظ**

**خواص حصرية**

$a$  و  $b$  عدداً حقيقيين موجبان تماماً.

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln e = 1 , \ln 1 = 0$$

$$n \in \mathbb{Z} / \ln(a^n) = n \ln a$$

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

$$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$$

$$\ln \frac{1}{b} = -\ln b$$

**للحفظ**

**خواص تحليلية**

$f$  دالة عددية معرفة وقابلة للاشتقاق على  $D$ .

الدالة  $\ln$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$ .

من أجل كل  $x$  من  $]0; +\infty[$  ،  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ .

إذا كانت  $f \neq 0$  على  $D$  فإن  $(\ln |f|)' = \frac{f'}{f}$ .

إذا كانت  $f > 0$  على  $D$  فإن  $(\ln f)' = \frac{f'}{f}$ .

نجواري  $0$  ،  $\ln(1 + h) \approx h$ .

◆ نهايات الدالتين  $\ln$  و  $\exp$

للحفظ

الدالة الأسية

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0^-$$

$$n \in \mathbb{N}^* / \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$n \in \mathbb{N}^* / \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

الدالة اللوغاريتم النيبيري

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

$$n \in \mathbb{N}^* / \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$n \in \mathbb{N}^* / \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

في حوار لانهائية، الدالة الأسية تتفوق على دالة القوة ذات الأس الحقيقي، وتتفوق دالة القوة ذات الأس الحقيقي على الدالة اللوغاريتم النيبيري

◆ اللوغاريتم العشري

تعريف

دالة اللوغاريتم العشري يرمز لها  $\log$ ، ومعرفة على  $]0; +\infty[$

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

$$\log 10 = 1$$

◆ الدالة الأسية ذات الأساس  $a$

تعريف

$a$  عدد حقيقي موجب تماماً حيث  $a \neq 1$ .

الدالة الأسية ذات الأساس  $a$ ، (دالة القوة الحقيقية) هي الدالة العددية التي يرمز لها  $\exp_a$  والمعرفة على  $\mathbb{R}$  :-

$$\exp_a x = e^{x \ln a}$$

ونكتب : من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $e^{x \ln a} = a^x$  (تجاوزاً)

للحفظ

$a$  و  $a'$  عدنان حقيقيان موجبان تماماً ويختلفان عن 1.

$x$  و  $y$  عدنان حقيقيان.

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \quad a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^0 = 1, \quad 1^x = 1$$

$$\left(\frac{a}{a'}\right)^x = \frac{a^x}{a'^x}, \quad (aa')^x = a^x a'^x, \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

◆ دالة الجذر النوبي

تعريف

$n$  عدد طبيعي غير معدوم.

دالة الجذر النوبي، هي الدالة التي نرمز لها  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$  والمعرفة على  $[0; +\infty[$

بـ:  $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ .

لدينا: من أجل كل  $x$  و  $y$  من  $[0; +\infty[$ ،  $x = y^n$  يكافئ  $y = \sqrt[n]{x}$ .

للحفظ

$x$  و  $y$  عدنان من  $[0; +\infty[$ ،  $n$  و  $m$  عدنان طبيعيين حيث  $n \neq 0$

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \text{ يكافئ } x = y \quad / \quad \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \text{ يكافئ } x < y$$

$$\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{m}{n}}, \quad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}, \quad \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y} \text{ حيث } y \neq 0$$

خواص جبرية

خواص تحليلية

• دالة الجذر النوبي  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$  معرفة على  $[0; +\infty[$  وقابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$ .

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}, \quad x \text{ من أجل كل } x \text{ من } ]0; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$$



$$\left(\frac{2x-1}{x^2-1}\right) > 0 \text{ معرفة إذا فقط إذا كان } f, f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{x^2-1}\right)$$

$$D_f = ]-1; \frac{1}{2}[ \cup ]1; +\infty[ \text{ إذا: } x \in ]-1; \frac{1}{2}[ \cup ]1; +\infty[$$

$$f, f(x) = \sqrt{\ln x - 1} \text{ معرفة إذا فقط إذا كان } x > 0 \text{ و } \ln x - 1 > 0 \text{ أي } x > e \text{ و}$$

$$D_f = ]e; +\infty[ \text{ إذا: } x > e$$

$$f, f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) \text{ معرفة إذا فقط إذا كان } e^x - 1 > 0 \text{ أي } x > 0$$

$$D_f = ]0; +\infty[ \text{ إذا: } x > 0$$

### معادلات ومتراجحات لوغاريتمية وأسية

حل في R معادلات والمتراجحات التالية.

$\ln \sqrt{2x-3} > \ln(6-x) - \frac{1}{2} \ln x$ $\frac{e^{2x-1}}{e^{3x+1}} \geq \frac{1}{e^2}$ $\ln\left(\frac{x-1}{2x-3}\right) \geq 0, e^x < e^{-x} + 1$	$\ln(2x+1) = 2\ln(x-1)$ $(e^{x-1} + 2)(e^{x+2} - 1) = 0$ $e^{6x} - 4e^{3x} + 3 = 0$
---	---

2

الحل:  $\ln(2x+1) = 2\ln(x-1)$  معرفة إذا فقط إذا كان  $2x+1 > 0$  و  $x-1 > 0$  أي  $x \in ]1; +\infty[$

$$\ln(2x+1) = 2\ln(x-1) \text{ تكافئ } (2x+1) = (x-1)^2 \text{ أي } x=0 \text{ أو } x=4.$$

$$\text{بما أن } ]1; +\infty[ \cap \{0\} = \emptyset \text{ فإن مجموعة الحلول } S = \{4\}.$$

$$(e^{x-1} + 2)(e^{x+2} - 1) = 0 \text{ معرفة على كامل R}$$

$$(e^{x-1} + 2) \neq 0 \text{ تكون } (e^{x+2} - 1) = 0 \text{ تكافئ } (e^{x-1} + 2)(e^{x+2} - 1) = 0$$

$$\text{تكافئ } x = -2 \text{ إذا مجموعة الحلول } S = \{-2\}$$

$$e^{6x} - 4e^{3x} + 3 = 0 \text{ معرفة على كامل R}$$

$$e^{6x} - 4e^{3x} + 3 = 0 \text{ تكافئ } (X^2 - 4X + 3 = 0 \text{ و } X = e^{3x})$$

### تمارين محلولة

#### مجموعة التعريف للدوال اللوغاريتم والنسبي والدوال الأسية

عُيِّن مجموعة تعريف الدالة العددية  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  في كل حالة مما يلي:

$$f(x) = \frac{\ln(-3x+9)}{\ln x - 1}, \quad f(x) = \ln(2x^2 - 3x + 1)$$

$$f(x) = e^{-x^2+1}, \quad f(x) = \ln(\sqrt{2x^2 - 3x}), \quad f(x) = \frac{e^x + 1}{e^{-x} - 1}$$

1

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right), \quad f(x) = \sqrt{\ln x - 1}, \quad f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{x^2-1}\right)$$

الحل:  $f, f(x) = \ln(2x^2 - 3x + 1)$  معرفة إذا فقط إذا كان  $2x^2 - 3x + 1 > 0$

$$\text{أي } D_f = ]-\infty; \frac{1}{2}[ \cup ]1; +\infty[ \text{ إذا: } x \in ]-\infty; \frac{1}{2}[ \cup ]1; +\infty[$$

$$f, f(x) = \frac{\ln(-3x+9)}{\ln x - 1} \text{ معرفة إذا فقط إذا كان}$$

$$\ln x - 1 \neq 0 \text{ و } x > 0 \text{ و } (-3x+9) > 0$$

$$\text{أي } x < 3 \text{ و } x > 0 \text{ و } x \neq e \text{ إذا: } x \in ]0; e[ \cup ]e; 3[$$

$$f, f(x) = \frac{e^x + 1}{e^{-x} - 1} \text{ معرفة إذا فقط إذا كان } e^{-x} - 1 \neq 0 \text{ أي } -x \neq 0$$

$$\text{إذا: } D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$f, f(x) = \ln(\sqrt{2x^2 - 3x}) \text{ معرفة إذا فقط إذا كان } 2x^2 - 3x > 0 \text{ أي}$$

$$D_f = ]-\infty; 0[ \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[ \text{ إذا: } x \in ]-\infty; 0[ \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$$

-x^2+1

$$f, f(x) = e^{-x} \text{ معرفة إذا فقط إذا كان } x \neq 0 \text{ إذا: } D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

## حساب مشتقات لدوال لوغاريتمية أو أسية

عَيِّن الدالة المشتقة للدالة  $f$  في كل حالة.

$$f(x) = x(\ln x^2), \quad f(x) = \ln(-4x^2 + 1), \quad f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2\ln \frac{1}{x} \quad 3$$

$$f(x) = 2^x, \quad f(x) = \ln(e^x - 1), \quad f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x + 2}, \quad f(x) = \ln \sqrt{1 - x^2}$$

الحل:  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2\ln \frac{1}{x}$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$ ، ولدينا:

$$f'(x) = x - 2 \cdot \frac{-1}{x^2} \times x = x + \frac{2}{x}$$

معرفة وقابلة للاشتقاق على  $]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$ ، ولدينا:

$$f'(x) = \frac{(-4x^2 + 1)'}{(-4x^2 + 1)^2} = \frac{-8x}{(-4x^2 + 1)^2}$$

معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R} - \{0\}$ ، ولدينا:

$$f'(x) = (\ln x^2)' + (\ln x^2)' \cdot x = \ln x^2 + 2$$

معرفة وقابلة للاشتقاق على  $]-1; 1[$ ، ولدينا:

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{1-x^2})'}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{1-x^2}$$

معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ ، ولدينا:

$$f'(x) = \frac{(e^{2x} + 1)'(e^x + 2) - (e^x + 2)'(e^{2x} + 1)}{(e^x + 2)^2} = \frac{e^{3x} + 4e^{2x} - e^x}{(e^x + 2)^2}$$

معرفة وقابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$ ، ولدينا:

$$f'(x) = \frac{(e^x - 1)'}{e^x - 1} = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

تكافئ  $(X = e^{3x} \text{ أو } X = 1 \text{ أو } X = 3)$ تكافئ  $(e^{3x} = 3 \text{ أو } e^{3x} = 1)$  تكافئ  $(x = \frac{1}{3} \ln 3 \text{ أو } x = 0)$ إذاً: مجموعة الحلول  $S = \left\{0; \frac{1}{3} \ln 3\right\}$ .معرفة إذا فقط إذا كان  $\ln \sqrt{2x-3} > \ln(6-x) - \frac{1}{2} \ln x$ أي  $x \in \left[\frac{3}{2}; 6\right[$ تكافئ  $\ln \sqrt{2x-3} > \ln(6-x) - \frac{1}{2} \ln x$  أي  $\sqrt{2x-3} > \frac{6-x}{\sqrt{x}}$  أي  $2x^2 - 3x > (6-x)^2$ تكافئ  $x^2 + 9x - 36 > 0$  أي  $x \in ]-\infty; -12[ \cup ]3; +\infty[$ إذاً: مجموعة الحلول  $S = \left[\frac{3}{2}; 6\right[ \cap (]-\infty; -12[ \cup ]3; +\infty[)$  أي  $S = ]3; 6[$ معرفة على كامل  $\mathbb{R}$   $\frac{e^{2x-1}}{e^{3x+1}} \geq \frac{1}{e^2}$ تكافئ  $\frac{e^{2x-1}}{e^{3x+1}} \geq \frac{1}{e^2}$  أي  $e^{2x+1} \geq e^{3x+1}$  أي  $2x+1 \geq 3x+1$  يكافئ  $x \leq 0$ إذاً: مجموعة الحلول  $S = \mathbb{R}$ معرفة على كامل  $\mathbb{R}$   $e^x < e^{-x} + 1$ تكافئ  $e^x < e^{-x} + 1$  أي  $e^{2x} - e^x - 1 < 0$  تكافئ  $(X^2 - X - 1 < 0 \text{ و } e^x = X)$ تكافئ  $e^x \in \left]0; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$  أي  $x \in \left]-\infty; \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right[$  أي  $S = \left]-\infty; \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right[$ معرفة إذا فقط إذا كان  $\ln\left(\frac{x-1}{2x-3}\right) \geq 0$  أي  $\frac{x-1}{2x-3} > 0$  أي  $x \in \left]-\infty; 1\right[ \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$ تكافئ  $\ln\left(\frac{x-1}{2x-3}\right) \geq 0$  أي  $\left(\frac{x-1}{2x-3}\right) \geq 1$  أي  $(-x+2)(2x-3) \geq 0$  أي  $x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$ وبالتالي:  $x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right] \cap \left(]-\infty; 1[ \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[)\right)$  إذاً: مجموعة الحلول  $S = \left[\frac{3}{2}; 2\right]$

$$a = \frac{\sqrt[3]{3^2} \times \sqrt[4]{3^7}}{\sqrt[12]{3^5}} = \frac{3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{7}{4}}}{3^{\frac{5}{12}}} = 3^{\frac{2}{3} + \frac{7}{4} - \frac{5}{12}} = 9$$

الحل:

$$b = \frac{2^{\sqrt{3}} \times 8^{\frac{1}{\sqrt{3}}}}{(0.5)^{\sqrt{3}}} = 2^{\sqrt{3}} \times (2^3)^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \times 2^{\sqrt{3}} = 2^{\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3}} = 2^{3\sqrt{3}}$$

## تمارين للتدريب

1. حل في R المعادلات والمترجمات التالية.

$$\frac{e^{2x} + 2e^x - 4}{2 - 3e^x} = -1, e^{2x} - 4e^{-2x} = 3, e^x - 2e^{\frac{x}{2}} - 5 = 0$$

$$(\ln x)^2 - 3 \ln x - 28 = 0, \ln(x^2 - 1) + 2 \ln 2 = \ln(4x - 1)$$

$$\ln|x-1| - \ln 5 \geq \ln \frac{1}{|x+5|}, \frac{3e^{2x} - 5e^x - 1}{e^{2x} - 4} \leq 1, e^{2x^2 - 3x - 5} \geq e^4$$

$$e^{2x} + e^x > 2, \ln \sqrt{4 - x^2} \leq \frac{1}{2} \ln 3x$$

2. حل في  $R \times R$  كلا من الجمل التالية.

$$\begin{cases} e^x + e^y = 5 \\ e^{2(x+y)} = 36 \end{cases}, \begin{cases} x^2 + y^2 = 169 \\ \ln x + \ln y = 1 \end{cases}, \begin{cases} \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\ln y} = \frac{7}{3} \\ \ln(xy) = \frac{7}{2} \end{cases}, \begin{cases} \ln(xy) = 3 \\ (\ln x)(\ln y) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^x \times e^y = a^2 \\ xy = 1 \end{cases}, \begin{cases} \ln x - 2 \ln y = \ln 2 \\ \frac{e^x}{e^y} = \left(\frac{1}{e^y}\right)^3 \end{cases}$$

(نناقش حسب قيم العدد الحقيقي الموجب  $a$ )

$f(x) = 2^x$  وتكتب  $f(x) = e^{x \ln 2}$ ، قابلة للاشتقاق على  $R$ ، ولدينا:  $2' \ln 2 = (\ln 2)e^{x \ln 2} = f'(x)$ .

## حساب النهايات

احسب النهايات عند أطراف مجالات التعريف للدالة  $f$  في كل حالة. $f$  معرفة على  $]0; +\infty[$  بالدستور:  $f(x) = x - 2 \ln x$ . $f$  معرفة على  $R$  بالدستور:  $f(x) = x + 1 - e^x$ . $f$  معرفة على  $]0; +\infty[$  بالدستور:  $f(x) = x \ln \left( \frac{1+x}{x} \right)$ . $f$  معرفة على  $R$  بالدستور:  $f(x) = \frac{2e^x + 1}{e^x + 1}$ .

4

الحل:  $\lim_{x \rightarrow 0} (x - 2 \ln x) = 0 - 2(-\infty) = +\infty$ 

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 1 - 2 \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty(1 - 0) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1 - e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 1 + \frac{1}{x} - \frac{e^x}{x} \right) = +\infty(1 + 0 - \infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1 - e^x) = -\infty + 1 - 0 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left( \frac{1+x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left( \frac{1+x}{x} \right)}{\frac{1}{1+x} - 1} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} x \ln \left( \frac{1+x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x) \frac{\ln \left( \frac{1+x}{x} \right)}{\frac{1}{1+x} - 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2e^x + 1}{e^x + 1} \right) = \frac{0+1}{0+1} = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2e^x + 1}{e^x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2X + 1}{X + 1} \right) = 2$$

## الحساب على القوى الحقيقية والجذور النونية

$$b = \frac{2^{\sqrt{3}} \times 8^{\frac{1}{\sqrt{3}}}}{(0.5)^{\sqrt{3}}}, a = \frac{\sqrt[3]{3^2} \times \sqrt[4]{3^7}}{\sqrt[12]{3^5}}$$

بسط الكتابين التاليين:

5

## 3. حساب النهايات

الدالة $f$ معرفة بالدستور	احسب نهاية $f$ عند
$f(x) = \frac{e^x}{x} - x$	$-\infty$ و $+\infty$ و $0$
$f(x) = e^{2x} - e^x$	$-\infty$ و $+\infty$
$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{3x}$	$-\infty$ و $+\infty$ و $0$
$f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x+4}$	$+\infty$
$f(x) = \frac{\ln(x^2 + x + 1)}{2x}$	$-\infty$ و $+\infty$ و $0$
$f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$	$-\infty$ و $+\infty$
$f(x) = x - \ln 2e^x - 1 $	$-\infty$ و $+\infty$

4.  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $]0; +\infty[$  بالدستور:  $f(x) = 2 \ln x - (\ln x)^2$

- ادرس تغيرات الدالة  $f$ ، ثم حل المعادلة  $f(x) = 0$ .
- أعط معادلة ديكارتية للمماس  $(T)$  للمنحنى  $(C)$  الممثل للدالة  $f$ ، عند النقطة ذات الفاصلة 1.

- أرسم  $(T)$  و  $(C)$  في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

5.  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $]0; +\infty[$  بالدستور:  $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$

- ادرس تغيرات الدالة  $g$ ، ثم استنتج إشارة  $g(x)$ .
- $f$  الدالة المعرفة على  $]0; +\infty[$  بالدستور:  $f(x) = \frac{\ln x}{x} - x$ .  $f(x)$  تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \bar{i}; \bar{j})$ .

• ادرس تغيرات الدالة  $f$ . (نستعين بنتائج السؤال الأول)

- أدرس وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته  $y = -x$ .

- بين أنه توجد نقطة وحيدة  $A$  من المنحنى  $(C_f)$  يكون المماس عندها للمنحنى  $(C_f)$

يوازي المستقيم  $(\Delta)$ ، يطلب تعيين إحداثياتها. أنشئ  $(\Delta)$  و  $(C_f)$ .

6.  $f$  الدالة المعرفة على  $R - \{1\}$  بالدستور:  $f(x) = \frac{x+1}{-x+1}$ .  $f(x)$  تمثيلها البياني

في المستوي  $(P)$  المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \bar{i}; \bar{j})$ .

- بين أن النقطة  $A$  ذات الإحداثيات  $(1; -1)$  هي مركز تناظر للمنحنى  $(C_f)$ ، ثم أنشئ  $(C_f)$ .

•  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $R^*$  بالدستور:  $g(x) = \frac{e^x + 1}{-e^x + 1}$

بين أن الدالة  $g$  فردية، ثم احسب نهاياتها عند أطراف مجالات التعريف.

- تعرّف على اتجاه تغير الدالة  $g$  وارسم تمثيلها البياني  $(C_g)$  في المستوي  $(P)$ .

•  $h$  الدالة العددية المعرفة على  $R_+^* - \{e\}$  بالدستور:  $h(x) = \frac{\ln x + 1}{-\ln x + 1}$

أدرس تغيرات  $h$ ، ثم بين أن  $h$  تقابل من المجال  $[1; \sqrt{e}]$  نحو  $[1; 3]$ .

استخرج عبارة  $h^{-1}(x)$  من أجل  $x \in [1; 3]$ .

7.  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $R$  بالدستور:  $f(x) = e^x - x - 4$

- ادرس تغيرات الدالة  $f$ . بين أن المستقيم  $(D)$  الذي معادلته  $x + y + 4 = 0$  هو مستقيم مقارب للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$ ، ثم ادرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(D)$ .
- أرسم  $(C_f)$  و  $(D)$ .

8.  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $] -1; +\infty[$  بالدستور:  $f(x) = x - \ln(x+1)$

- احسب نهايات الدالة  $f$  عند أطراف مجموعة تعريفها.
- ادرس تغيرات الدالة  $f$  وارسم تمثيلها البياني. استنتج إشارة الدالة  $f$  على المجال  $] -1; +\infty[$ .
- باستعمال إشارة  $f$ ، تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$ ، لدينا:  $\ln\left(\frac{1}{n} + 1\right) < \frac{1}{n}$

- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$ ، لدينا:  $\left(\frac{1}{n} + 1\right)^n < e$

## 4- المتتاليات العددية

**Hard equation**

ما يجب أن يعرف:

★ **عموميات**

**تعريف**

$n_0$  عدد طبيعي معطى.

المتتالية العددية  $u$  هي كل دالة من  $N$  نحو  $R$ ، والتي ترفق بكل عدد طبيعي  $n$  أكبر من أو يساوي  $n_0$ ، العدد الحقيقي  $u(n)$ .

المجموعة  $I$  حيث  $I = \{n : n \in N / n \geq n_0\}$  تدعى مجموعة تعريف المتتالية العددية  $u$ . (بمجال من  $N$  يبدأ من  $n_0$ )

يرمز كذلك للمتتالية العددية  $u$  بـ:  $(u_n)_{n \geq n_0}$  أو  $(u_n)_{n \in I}$ .

أو يستعمل الرمز  $(u_n)$  مع ذكر مجموعة تعريفها.

يرمز كذلك للعدد الحقيقي  $u(n)$  بـ:  $u_n$  ويدعى الحد العام للمتتالية العددية  $u$ .

◆ **طريقتي توليد متتالية عددية**

تعيّن متتالية عددية بإحدى الطريقتين:

• تعطى عبارة حلها العام، أي عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  (دستور الدالة  $f$ ) ونكتب:  $u_n = f(n)$ .

$f$  تدعى الدالة المرفقة بالمتتالية العددية  $u$ .

• تعطى علاقة بين حدود متعاقبة للمتتالية العددية (تدعى علاقة تراجعية).

- هنا نكتفي بالعلاقة بين حدين متتاليين - ونكتب:  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

$f$  تدعى الدالة المرفقة بالمتتالية العددية  $u$ .

$f$  تحقق أنه من أجل كل  $x$  من  $D_f$  لدينا:  $f(x) \in D_f$  و  $u_{n+1} \in D_f$ .

9.  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $]1; +\infty[$  بالدستور:  $f(x) = \frac{1}{2}x + \ln\left(\frac{x-1}{3x+4}\right)$  و

$(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوى  $(P)$  المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O, \vec{i}; \vec{j})$ .

• ادرس تغيرات الدالة  $f$ .

• بين أن المستقيم  $(D)$  الذي معادلته  $y' = \frac{1}{2}x - \ln 3$  هو مستقيم مقارب للمنحنى  $(C_f)$ .

• ثم ادرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(D)$ .

• ارسم المستقيم  $(D)$  والمنحنى  $(C_f)$ .

•  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $]1; +\infty[ \cup ]-\infty; -1[$  بالدستور:  $g(x) = f(|x|)$ .

• علّل زوجية الدالة  $g$ .

• باستعمال الدراسة السابقة للدالة  $f$ ، ارسم جدولاً كاملاً لتغيرات للدالة  $g$ .

• اشرح كيف يمكننا رسم التمثيل البياني  $(C_g)$  للدالة  $g$  انطلاقاً من  $(C_f)$ .

• ارسم  $(C_g)$ .

10.  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $R$  كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = e^x - x & / x < 0 \\ f(x) = \cos^2 \pi x & / 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x} & / x > 1 \end{cases}$$

ادرس استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة  $f$ . ثم تغيرات الدالة  $f$  وارسم  $(C_f)$ .



## ◆ اتجاه تغير متالة عددية.

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $I$  حيث  $I = \{n: n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$

و  $n_0$  عدد طبيعي معطى.

$(u_n)$  متزايدة تماماً على  $I$  معناه  $|$  من أجل كل  $n$  من  $I$  ،  $u_{n+1} - u_n > 0$  .

$(u_n)$  متناقصة تماماً على  $I$  معناه  $|$  من أجل كل  $n$  من  $I$  ،  $u_{n+1} - u_n < 0$  .

$(u_n)$  متزايدة على  $I$  معناه  $|$  من أجل كل  $n$  من  $I$  ،  $u_{n+1} - u_n \geq 0$  .

$(u_n)$  متناقصة على  $I$  معناه  $|$  من أجل كل  $n$  من  $I$  ،  $u_{n+1} - u_n \leq 0$  .

$(u_n)$  ثابتة على  $I$  معناه  $|$  من أجل كل  $n$  من  $I$  ،  $u_{n+1} - u_n = 0$  .

## طريقة

لتعيين اتجاه تغير متتالية عددية على  $I$  ، ندرس إشارة الفرق  $u_{n+1} - u_n$

أو نقارن النسبة  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  مع 1 ، وهذا فقط في حالة  $(u_n)$  موجبة تماماً.

## حالة خاصة 1.

من أجل المتتالية المعرفة بـ:  $u_n = f(n)$  على المجموعة  $I = \{n: n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$

إذا كانت الدالة  $f$  متزايدة ( أو متناقصة ) على  $[n_0; +\infty[$  فإن المتتالية  $(u_n)$

متزايدة ( أو متناقصة ) على  $I$  .

أنتبه: عكس هذه النتيجة غير صحيح

## حالة خاصة 2.

من أجل المتتالية المعرفة بالعلاقة التراجعية:  $u_{n+1} = f(u_n)$  على المجموعة

$$I = \{n: n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$$

لدينا:  $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = f(x) - x$  ، للتعرف على اتجاه

تغير المتتالية  $(u_n)$  يكفي دراسة إشارة الفرق  $f(x) - x$  على المجموعة  $D_f$  .

أو لدينا:  $u_{n+2} - u_{n+1} = f(u_{n+1}) - f(u_n)$  ، للتعرف على اتجاه تغير

المتتالية  $(u_n)$  يكفي دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$  على  $D_f$  .

## ◆ المتتالية العددية المحدودة

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $I$  حيث  $I = \{n: n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$  و  $n_0$  عدد طبيعي معطى.

• المتتالية  $(u_n)$  محدودة من الأعلى بالعدد الحقيقي  $M$  إذا وفقط إذا كان من أجل كل

$$n \text{ من } I, u_n \leq M$$

• المتتالية  $(u_n)$  محدودة من الأسفل بالعدد الحقيقي  $m$  إذا وفقط إذا كان من أجل كل

$$n \text{ من } I, u_n \geq m$$

• المتتالية  $(u_n)$  محدودة إذا وفقط إذا كانت المتتالية  $(u_n)$  محدودة من الأعلى ومن الأسفل.

## ◆ متاليات مرجعية ونهاياتها

المتاليات المعرفة بحددها العام  $u_n^2$  ،  $n^3$  ،  $\sqrt{n}$  هي مرجعية نهايتها هي  $+\infty$  .

المتاليات المعرفة بحددها العام  $\frac{1}{n}$  ،  $\frac{1}{n^2}$  ،  $\frac{1}{n^3}$  ،  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  هي مرجعية نهايتها هي 0 .

## ◆ المتتالية المتقاربة والمتتالية المتباعدة

## تعريف

المتتالية العددية المتقاربة نحو العدد الحقيقي  $l$  هي التي تقبل نهاية

محدودة  $l$  عندما ينتهي  $n$  إلى  $+\infty$  .

المتتالية العددية المتباعدة هي المتتالية العددية غير المتقاربة.

## طريقة

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $I$  حيث  $I = \{n: n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$  و

$n_0$  عدد طبيعي معطى.

• للبرهان أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة نحو 0 . يمكننا أن نبين أنه:

يوجد عدد طبيعي  $n'$  بحيث، إذا كان  $n \geq n'$  فإن  $|u_n| \leq kv_n$  (

حيث:  $(v_n)$  متتالية مرجعية متقاربة نحو 0 ، و  $k \in \mathbb{R}^+$  .

• للبرهان أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة نحو العدد الحقيقي  $l$  . يمكننا أن نبين أن المتتالية

$(u_n - l)$  متقاربة نحو 0 . ويمكننا أن نبين كذلك أنه: يوجد عدد طبيعي  $n'$

بحيث: ( إذا كان  $n \geq n'$  فإن  $w_n \leq u_n \leq v_n$  )

حيث:  $(v_n)$  و  $(w_n)$  متتاليتان مرجعيتان متقاربتان نحو 0 .

## مبرهنة 1

كل متتالية متقاربة هي متتالية محدودة.  
كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى هي متتالية متقاربة.  
كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل هي متتالية متقاربة.

## المتاليتان المتجاورتان

## تعريف

$(u_n)$  و  $(v_n)$  متاليتان عدديتان متجاورتان معناه  $(u_n)$  متزايدة و  $(v_n)$  متناقصة و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$

## مبرهنة 2

كل متاليتين متجاورتين هما متاليتين متقاربتين نحو نفس العدد الحقيقي  $l$ .

## ملاحظة

- إذا كانت  $(u_n)_{n \in I}$  و  $(v_n)_{n \in I'}$  متاليتان عدديتان متجاورتان، حيث  $(u_n)$  متزايدة و  $(v_n)$  متناقصة فإنه، من أجل كل عدد طبيعي  $n$   $I \cap I' \neq \emptyset$  لدينا:  $u_n \leq v_n$ .
- إذا كانت  $(u_n)_{n \in I}$  و  $(v_n)_{n \in I'}$  متاليتان عدديتان متجاورتان، حيث  $(u_n)$  متزايدة و  $(v_n)$  متناقصة وكانت لهما نفس النهاية  $l$  فإنه، من أجل كل عدد طبيعي  $n$  من  $I \cap I'$  لدينا:  $u_n \leq u_{n+1} \leq l \leq v_{n+1} \leq v_n$ .

## مبرهنة 3

$(u_n)$  متتالية معرفة بالعلاقة التراجعية:  $u_{n+1} = f(u_n)$ .  
إذا كانت  $(u_n)$  متقاربة نحو  $l$  وكانت الدالة  $f$  مستمرة عند  $l$  فإن،  $f(l) = l$ .

## المتتالية الحسابية

- $(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $I$  حيث  $I = \{n: n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$  و  $n_0$  عدد طبيعي معطى.
- المتتالية  $(u_n)$  حسابية حدها الأول  $u_{n_0}$  وأساسها  $r$  إذا وفقط إذا كانت معرفة بـ:  $u_{n+1} = u_n + r$  من أجل كل  $n$  من  $I$  (العلاقة التراجعية)
- أو  $u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$  من أجل كل  $n$  من  $I$  (عبارة الحد العام)
- من أجل كل عددين طبيعيين  $n$  و  $p$  من  $I$ ، لدينا:  $u_n = u_p + (n - p)r$
- من أجل كل عددين طبيعيين  $n$  و  $p$  من  $I$  حيث:  $p \leq n$ ،  
لدينا:  $u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \frac{n - p + 1}{2} (u_n + u_p)$
- $(n - p + 1)$  يمثل عدد الحدود المتتالية التي تجمع من  $u_p$  إلى  $u_n$ .
- التمثيل البياني للمتتالية الحسابية  $(u_n)$  هو مجموعة النقط  $M(n; u_n)$  التي تنتمي إلى المستقيم الذي معامل توجيهه الأساس  $r$ .

## المتتالية الهندسية

- $(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $I$  حيث  $I = \{n: n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$  و  $n_0$  عدد طبيعي معطى.
- المتتالية  $(u_n)$  هندسية حدها الأول  $u_{n_0}$  وأساسها  $q$  إذا وفقط إذا كانت معرفة بـ:  $u_{n+1} = u_n \times q$  من أجل كل  $n$  من  $I$  (العلاقة التراجعية)
- أو  $u_n = u_{n_0} \times q^{(n - n_0)}$  من أجل كل  $n$  من  $I$  (عبارة الحد العام)
- من أجل كل عددين طبيعيين  $n$  و  $p$  من  $I$ ، لدينا:  $u_n = u_p \times q^{(n - p)}$
- من أجل كل عددين طبيعيين  $n$  و  $p$  من  $I$  حيث:  $p \leq n$ ،  
لدينا:  $u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \times \frac{1 - q^{(n - p + 1)}}{1 - q}$  حيث  $q \neq 1$ .
- $(n - p + 1)$  يمثل عدد الحدود المتتالية التي تجمع من  $u_p$  إلى  $u_n$ .

## نهايات متتالية هندسية:

- إذا كان  $q > 1$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ ، إذا كان  $q = 1$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$
- إذا كان  $-1 < q < 1$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ ، إذا كان  $q \leq -1$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$  غير موجودة

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1) \quad \text{صحيحة فرضاً.}$$

نبرهن صحة الخاصية  $P_{k+1}$  أي نبين أن:  $1^2 + 2^2 + \dots + (k+1)^2 = \frac{1}{6} (k+1)(k+2)(2k+3)$   
لدينا:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + (k+1)^2 &= 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 \\ &= \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 \\ &= \frac{1}{6} (k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)] = \frac{1}{6} (k+1)(k+2)(2k+3) \\ &\quad \text{من أجل كل } n \text{ من } N, \quad \underbrace{3^{2n} - 2^n = 7\alpha}_{P_n}, \quad \alpha \in N / \end{aligned}$$

نتحقق من صحة الخاصية  $P_0$ :  $3^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0 = 7 \times 0$ .  $P_0$  محققة

نفرض صحة الخاصية  $P_n$  إلى الرتبة  $k$  حيث:  $k \geq 0$ . أي أن:

$$3^{2k} - 2^k = 7\alpha \quad \alpha \in N / \quad \text{صحيحة فرضاً.}$$

نبرهن صحة الخاصية  $P_{k+1}$  أي نبين أن:  $3^{2(k+1)} - 2^{k+1} = 7\beta$   $\beta \in N /$

$$\begin{aligned} 3^{2(k+1)} - 2^{k+1} &= 3^2 \times 3^{2k} - 2 \times 2^k = 9(7\alpha + 2^k) - 2 \times 2^k \\ &= 63\alpha + 7 \times 2^k = 7(9\alpha + 2^k) = 7\beta \\ &\quad \text{لدينا:} \\ &\quad \beta = (9\alpha + 2^k) \in N \quad \text{حيث} \end{aligned}$$

### اتجاه تغير متتالية عددية

تعرف على اتجاه تغير المتتالية العددية في كل حالة.

$$u_n = \frac{n+4}{n+2} \quad \text{متتالية عددية معرفة على } N \text{ بالعلاقة:}$$

$$k_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \quad \text{متتالية عددية معرفة على } N \text{ بالعلاقة:} \quad 2$$

$(v_n)$  متتالية عددية معرفة على  $N$  بحدها الأول  $v_0 = 1$  والعلاقة التراجعية:

$$v_{n+1} = 2 + \ln v_n$$

### البرهان بالتراجع

$P_n$  خاصية متعلقة بالعدد الطبيعي  $n$  من المجموعة  $I$  حيث:  $I = \{n: n \in N / n \geq n_0\}$  و  $n_0$  عدد طبيعي معطى.

للبرهان بالتراجع على أن الخاصية  $P_n$  صحيحة من أجل كل  $n$  من  $I$ ، نتبع المراحل الثلاث التالية:

① نتحقق من صحة الخاصية  $P_{n_0}$  ( هذه المرحلة تدعى بداية التراجع )

② نفرض أن الخاصية  $P_n$  صحيحة إلى غاية الرتبة  $k$  حيث:  $k \geq n_0$ .

( هذه المرحلة تدعى فرضية التراجع )

③ نبرهن أن الخاصية  $P_{k+1}$  صحيحة. ( هذه المرحلة تدعى برهان التراجع )

(المرحلتين ② و ③ تدعى استلزام التراجع)

### تمارين محلولة

### البرهان بالتراجع

برهن بالتراجع صحة العبارتين التاليتين.

$$\begin{aligned} 1. \quad & 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1), \quad n \text{ من } N^* \\ & \text{من أجل كل } n \text{ من } N, \quad 3^{2n} - 2^n \text{ يقبل القسمة على } 7. \end{aligned}$$

$$\text{الحل: من أجل كل } n \text{ من } N^*, \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1), \quad \underbrace{P_n}$$

نتحقق من صحة الخاصية  $P_1$ :  $1^2 = \frac{1}{6} 1(1+1)(2 \times 1 + 1)$ .  $P_1$  محققة

نفرض صحة الخاصية  $P_n$  إلى الرتبة  $k$  حيث:  $1 \leq k$ . أي أن:

الحل:  $(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $N$  بالعلاقة:  $u_n = \frac{n+4}{n+2}$

لدينا: من أجل كل  $n$  من  $N$  ،  $u_{n+1} - u_n = \frac{n+5}{n+3} - \frac{n+4}{n+2} = \frac{-2}{(n+2)(n+3)} < 0$

إذاً المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماماً على  $N$ .

•  $(k_n)$  متتالية عددية معرفة على  $N$  بالعلاقة:  $k_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$

( يمكن العمل بطريقة المثال الأول كما يمكن العمل بالطريقة التالية )

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-1\}$  بالدستور  $f(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$  . وندرس اتجاه تغيراتها فقط على  $\mathbb{R}_+$ .

من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}_+$  ،  $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^3} > 0$  أي  $f$  متزايدة تماماً على  $\mathbb{R}_+$  ؟

وبالتالي المتتالية  $(k_n)$  متزايدة تماماً على  $N$ .

•  $(v_n)$  متتالية عددية معرفة على  $N$  بحدها الأول  $v_0 = 1$  والعلاقة التراجعية:  $v_{n+1} = 2 + \ln v_n$

للتعرف على تغيراتها نتبع ما يلي:

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}_+$  بالدستور  $f(x) = 2 + \ln x$  وندرس اتجاه تغيراتها على  $\mathbb{R}_+^*$ .

اتجاه تغير الدالة  $f$  نفسه اتجاه تغير الدالة  $\ln$  كون:  $f = \ln + 2$  إذاً  $f$  متزايدة تماماً على  $\mathbb{R}_+^*$ .

لدينا:  $(v_{n+1} - v_n) = f(v_n) - f(v_{n-1})$  نعلم إذاً على اتجاه تغير الدالة  $f$  وعلى البرهان

بالتراجع لمقارنة  $v_{n+1}$  و  $v_n$ .

$v_0 = 1$  و  $v_1 = 2$  أي  $v_1 > v_0$  ( بداية التراجع )

نفرض ان  $v_{k+1} > v_k$  حيث  $k \in N$  ( فرضية التراجع )

وبما أن  $f$  متزايدة تماماً على  $\mathbb{R}_+^*$  فإن  $v_{k+1} > v_k$  تستلزم  $f(v_{k+1}) > f(v_k)$  أي

$v_{k+2} > v_{k+1}$  ( برهان التراجع )

إذاً: من أجل كل  $n$  من  $N$  ،  $v_{n+1} > v_n$  وبالتالي:  $(v_n)$  متزايدة تماماً على  $N$ .

### دراسة تقارب متتالية عددية

• بين أن المتاليات العددية التالية متقاربة.

•  $(u_n)$  معرفة على  $N^*$  بالعلاقة:  $u_n = \frac{n+4}{n^2}$

•  $(v_n)$  معرفة على  $N$  بالعلاقة:  $v_n = \frac{n^2-1}{n^2-n+2}$

•  $(k_n)$  معرفة على  $N$  بالعلاقة:  $k_n = \frac{n-11}{2^n}$

•  $(w_n)$  معرفة على  $N$  بالعلاقة:  $w_n = \frac{3^n+2^n}{4^n-5^n}$

• بين أن المتتالية  $(h_n)$  المعرفة على  $N$  بالعلاقة:  $h_n = \frac{n^3-1}{n^2+2}$  متباعدة

الحل:  $(u_n)$  معرفة على  $N^*$  بالعلاقة:  $u_n = \frac{n+4}{n^2}$

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  بالدستور  $f(x) = \frac{x+4}{x^2}$  . لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

إذاً:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  ، وبالتالي،  $(u_n)$  متقاربة نحو 0.

•  $(v_n)$  معرفة على  $N$  بالعلاقة:  $v_n = \frac{n^2-1}{n^2-n+2}$  . نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على

$\mathbb{R}$  بالدستور  $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-x+2}$  . ولدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

إذاً:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$  . وبالتالي،  $(v_n)$  متقاربة نحو 1.

•  $(k_n)$  معرفة على  $N$  بالعلاقة:  $k_n = \frac{n+11}{2^n}$

نلاحظ أنه: من أجل كل  $n$  من  $N$  ،  $\frac{n+11}{2^n} > 0$  . معناه أن المتتالية  $(k_n)$  محدودة من الأسفل.

ولدينا:  $k_{n+1} - k_n = \frac{1}{2^{n+1}}(n+12-2n-22) = -\frac{n+10}{2^{n+1}} < 0$

## المتتالية الهندسية

نعرف المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  على المجموعة  $N$  بـ:  $u_0 = 1$  ،

$$v_0 = 2 \text{ و من أجل كل } n \text{ من } N ،$$

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \text{ و } v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5}$$

• نضع:  $w_n = v_n - u_n$  من أجل كل  $n$  من  $N$  .

• بين أن  $(w_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين نهايتها والتعبير  $w_n$  عن بدلالة  $n$  .

• عبّر عن العددين  $u_{n+1} - u_n$  و  $v_{n+1} - v_n$  بدلالة  $w_n$  ، واستنتج اتجاه تغير المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  .

• بين أن المتتاليتان  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متقاربتان ولهما نفس النهاية  $l$  .

• نضع:  $l_n = 3u_n + 10v_n$  من أجل كل  $n$  من  $N$  . بين أن المتتالية  $(l_n)$  ثابتة واستنتج قيمة  $l$  .

5

**الحل:** واضح أن  $(w_n)$  متتالية عددية كمجموع المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  .

من أجل كل  $n$  من  $N$  ،

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5} - \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{3u_n + 12v_n - 5u_n - 10v_n}{15} \\ = \frac{2}{15} w_n$$

يعني أن المتتالية  $(w_n)$  هندسية أساسها  $\frac{2}{15}$  وحدها الأول  $w_0 = v_0 - u_0 = 1$

بما أن  $\frac{2}{15} \in ]-1; 1[$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$  . ولدينا من أجل كل  $n$  من  $N$  ،

$$w_n = w_0 \left( \frac{2}{15} \right)^n = \left( \frac{2}{15} \right)^n$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = \frac{u_n + 2v_n - 3u_n}{3} = \frac{2}{3} w_n ، \text{ من أجل كل } n \text{ من } N ،$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 4v_n}{5} - v_n = \frac{u_n + 4v_n - 5v_n}{5} = -\frac{1}{5} w_n \text{ و}$$

$(k_n)$  متناقصة تماماً على  $N$  .

كون المتتالية  $(k_n)$  متناقصة تماماً ومحدودة من الأسفل ، فهي متقاربة .

$(w_n)$  معرفة على  $N$  بالعلاقة:  $w_n = \frac{3^n + 2^n}{4^n - 5^n}$  . ولدينا:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5^n \left( \left( \frac{3}{5} \right)^n + \left( \frac{2}{5} \right)^n \right)}{5^n \left( \left( \frac{4}{5} \right)^n - 1 \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left( \frac{3}{5} \right)^n + \left( \frac{2}{5} \right)^n}{\left( \frac{4}{5} \right)^n - 1} = \frac{0+0}{0-1} = 0$$

يعني أن  $(w_n)$  متقاربة نحو 0 .

المتتالية  $(h_n)$  المعرفة على  $N^*$  بالعلاقة:  $h_n = \frac{n^3 - 1}{n^2 + 2}$  متباعدة كون

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{n^2} = +\infty \text{ (غاية غير محدودة)} .$$

## المتتاليتان المتجاورتان

$(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتان معرفتان على  $N^*$  بـ:

$$v_n = u_n + \frac{1}{n} \text{ و } u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

4

بين أن المتتاليتان  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متجاورتان .

**الحل:** لدينا من أجل كل  $n$  من  $N$  ،

$$u_{n+1} - u_n = \left( 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2} \right) - \left( 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

$$v_{n+1} - v_n = \left( u_{n+1} + \frac{1}{n+1} \right) - \left( u_n + \frac{1}{n} \right) = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0 ، \text{ من أجل كل } n \text{ من } N ،$$

يعني أن  $(u_n)$  متزايدة تماماً على  $N$  و أن  $(v_n)$  متناقصة تماماً على  $N$  .

وكذلك لدينا:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  إذا المتتاليتان  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متجاورتان .

بما أنه من أجل كل  $n$  من  $N$ ،  $w_n = \left(\frac{2}{15}\right)^n > 0$ ، فإن  $u_{n+1} - u_n > 0$  و  $v_{n+1} - v_n < 0$ .

أي  $(u_n)$  متزايدة تماماً على  $N$  و  $(v_n)$  متناقصة تماماً على  $N$ .

حسب ما سبق لدينا  $(u_n)$  متزايدة تماماً على  $N$  و  $(v_n)$  متناقصة تماماً على  $N$  و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0$$

المتالتان  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متجاورتان، وبالتالي فهما متقاربتان ولهما نفس النهاية  $l$ .

من أجل كل  $n$  من  $N$ ،  $l_{n+1} = 3u_{n+1} + 10v_{n+1} = 3 \frac{u_n + 2v_n}{3} + 10 \frac{u_n + 4v_n}{5} = l_n$ ، يعني أن المتتالية  $(l_n)$  ثابتة.

إذاً:  $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \lim_{n \rightarrow \infty} l_0 = 23$  ومن جهة أخرى

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (3u_n + 10v_n) = 3l + 10l = 13l$$

$$\text{منه } 13l = 23 \text{ أي } l = \frac{23}{13}$$

### تمارين للتدريب

1. نقبل أن الكثير حدود ذو المعاملات الحقيقية  $P(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx$  يحقق

$$P(x+1) - P(x) = x^2, \quad R \text{ من } x \text{ كل}$$

• يكون تعيين العادين  $a$  و  $b$  أحسب  $P(0)$ ،  $P(1)$ ،  $P(-1)$ ، احسب إذا العددين  $a$  و  $b$ .

• برهن بالتراجع أنه: من أجل كل  $n$  من  $N$ ،  $P(n)$  عدد طبيعي.

• نضع:  $S_1 = 1$  و من أجل كل  $n$  من  $N$ ،  $S_n = 1 + 2^2 + \dots + n^2$ ، بين أن

$$S_n = P(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

•  $(u_n)$  متتالية معرفة على  $N$  بـ:  $u_0 = 0$  و من أجل كل  $n$  من  $N$ ،  $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$

• برهن بالتراجع أنه: من أجل كل  $n$  من  $N$ ، المتتالية  $(u_n)$  موجبة.

• اكتشف وبرهن بالتراجع اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)_{n \in N}$ .

2.  $(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $N$  بـ:  $u_0 = 8$  و من أجل كل  $n$  من  $N$ ،

$$u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{u_n}$$

• مثل في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(\vec{O}, \vec{i}; \vec{j})$  الدالة  $f: x \mapsto \frac{5x-4}{x}$

والمستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته  $y = x$ .

• مثل بيانيا الحدود  $u_0, u_1, u_2$ . هل يمكننا التوقع بتقارب المتتالية  $(u_n)$ ؟

• بين أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة ومحدودة من الأسفل، ثم عيّن نهايتها.

3. من أجل كل  $n$  من  $N - \{0, 1\}$ ، نعرف على المجال  $]0, +\infty[$  الدالة  $f_n$

$$f_n(x) = x^n(2 \ln x - 1)$$

• عيّن الدالة المشتقة  $f'_n$ ، ثم بين أنما تنعدم مرة واحدة على المجال  $]0, +\infty[$  عند العدد الحقيقي  $\alpha_n$  يطلب تعيينه.

• بين أنه من أجل كل  $n$  من  $N - \{0, 1\}$ ،  $1 \leq \alpha_n < \sqrt{e}$ .

• ادرس اتجاه تغير المتتالية العددية  $(\alpha_n)$ ، ثم حدد سلوكها بجوار  $+\infty$ .

4.  $(u_n)$  متتالية عددية موجبة معرفة على  $N^*$  بـ:  $u_1 = 1$  و من أجل كل  $n$

$$n^2 u_n^2 - (n-1)^2 u_{n-1}^2 = n, \quad N^* - \{1\} \text{ من}$$

$(v_n)$  المتتالية العددية المعرفة على  $N^*$  بـ:  $v_n = n^2 u_n^2$ . عيّن  $v_n$  بدلالة  $n$  واستنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة وعيّن نهايتها.

5.  $(u_n)$  متتالية معرفة على  $N$  بـ:  $u_0 = -1$  و من أجل كل  $n$  من  $N$ ،

$$u_{n+1} = \frac{9}{6 - u_n}$$

• بين أن المتتالية  $(u_n)$  محدودة من الأعلى بالعدد 3. بين أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة واحسب نهايتها.

•  $(v_n)_{n \in N}$  متتالية معرفة بـ:  $v_n = \frac{-1}{3 - u_n}$  بين أن المتتالية  $(v_n)$  حسابية، يطلب

تعيين حدها الأول وأساسها.

أحسب  $v_n$  ثم  $u_n$  بدلالة  $n$ ، ثم أوجد نهاية  $(u_n)$ .



6.  $(u_n)$  متتالية معرفة على  $N^*$  بـ:  $u_1 = 7$  ومن أجل كل  $n$  من  $N^*$ ،

$$u_{n+1} = au_n + 5 \quad a \in \mathbb{R}.$$

نضع: من أجل كل  $n$  من  $N^*$ ،  $v_n = u_n - 6$ .

• عَيِّن العدد الحقيقي  $a$  حتى تكون  $(v_n)$  متتالية هندسية، يطلب تعيين حلدها الأول وأساسها.

• فيما يلي نعتبر  $a = \frac{1}{6}$ ، احسب إذن  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم نهاية  $(v_n)$ .

• نضع:  $S_n = \sum_{i=1}^n v_i$ ، احسب  $S_n$  بدلالة  $n$ ، وادرس تقارب المتتالية  $(S_n)_{n \in N^*}$ .

ثم احسب نهايتها.

7. نعرّف متتاليتين عدديتين  $u$  و  $v$  بـ:  $u_1 = 1$  و  $v_1 = 12$

ومن أجل كل  $n$  من  $N^*$ ،  $u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$  و  $v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n)$

• من أجل كل  $n$  من  $N^*$  نضع:  $w_n = v_n - u_n$  بين أن  $(w_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

• احسب  $w_1$  ثم عبّر عن  $w_n$  بدلالة  $n$ ، احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$ .

• بين أن المتتالية  $u$  متزايدة وأن المتتالية  $v$  متناقصة، بالاستعانة بالسؤال الأول.

• ماذا تستنتج عن المتتاليتين  $u$  و  $v$ ؟

• من أجل كل  $n$  من  $N^*$  نضع:  $k_n = 8v_n + 3u_n$  بين أن المتتالية  $(k_n)$  ثابتة.

• استنتج نهايتي كلا  $u$  و  $v$ .

8.  $g$  الدالة المعرفة على  $]-3; +\infty[$  بالدستور:  $g(x) = \ln(x+3)$ .

• ادرس تغيرات الدالة  $g$ .

•  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة على  $N$  بـ:  $u_0 = 1$  ومن أجل كل  $n$  من  $N$ ،

$$u_{n+1} = g(u_n)$$

باستعمال السؤال الأول — نعرّف على اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$ .

• بين أن المتتالية  $(u_n)$  محدودة من الأعلى بالعدد 2. هل هي متقاربة؟ نعرّف على  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

•  $(v_n)$  المتتالية العددية المعرفة على  $N$  بـ:  $v_0 = 2$  ومن أجل كل  $n$  من  $N$ ،  $v_{n+1} = g(v_n)$

بين أن المتتالية  $(v_n)$  محدودة من الأسفل بالعدد 1. هل هي متقاربة؟ نعرّف على  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .

• بين أن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ ، استنتج أن المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متجاورتان.

•  $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بالدستور:  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$  و  $h$  الدالة المعرفة

$$h(x) = f(x) - \frac{x}{2} \quad \text{على } \mathbb{R} \text{ بالدستور:}$$

ادرس تغيرات الدالة  $h$ ، واستنتج إشارة العدد  $h(x)$  لحسب قيم  $x$ .

•  $(w_n)$  المتتالية العددية المعرفة على  $N$  بـ:  $w_0 = 1$  ومن أجل كل  $n$  من  $N$ ،

$$w_{n+1} = f(w_n)$$

بين أنه: من أجل كل  $n$  من  $N$ ،  $0 \leq w_{n+1} \leq \frac{1}{2} w_n$ ، واستنتج أن:  $0 \leq w_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

• نعرّف على  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$

9.  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة بـ:  $u_0 = 3$  ومن أجل كل  $n$  من  $N$ ،  $u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n}$

• بين أنه: من أجل كل  $n$  من  $N$ ،  $0 \leq u_n \leq 3$

• واستنتج أن هذه المتتالية  $(u_n)$  معرفة فعلا على  $N$ .

• نضع:  $a_n = u_{2n}$  و  $b_n = u_{2n+1}$  من أجل كل  $n$  من  $N$ .

• ادرس اتجاه تغير المتتاليتين العدديتين  $(a_n)$  و  $(b_n)$ .

• بين أنه: من أجل كل  $n$  من  $N$ ،  $b_n \leq 1 \leq a_n$

• استنتج أن المتتالية  $(u_n)$  إذا تقاربت فهي تقارب نحو 1.

10.  $(k_n)$  المتتالية العددية المعرفة بـ:  $k_0 = 1$  ومن أجل كل  $n$  من  $N$ ،

$$k_{n+1} = \sin k_n$$

• بالاستعانة بالحاسبة، أعط تخميناً حول سلوك المتتالية  $(k_n)$ .

• بين أنه: من أجل كل  $n$  من  $N$ ،  $k_n \in [0; 1]$

• ادرس إشارة الدالة  $x \mapsto x - \sin x$  على المجال  $[0; 1]$  واستنتج اتجاه تغير المتتالية  $(k_n)$ .

• ماذا يمكننا أن نستنتج فيما يخص المتتالية  $(k_n)$ ؟

## 5- الحساب التكاملي

**Hard equation**

ما يجب أن يعرف:  
★ التكامل المحدود

تعريف

$f$  دالة عددية للمتغير الحقيقي  $x$  و  $F$  دالة أصلية لها على المجال  $I$ . ليكن  $a$  و  $b$  عدداً من  $I$ .

التكامل (من  $a$  إلى  $b$ ) للدالة  $f$  هو العدد الحقيقي  $F(b) - F(a)$ .

ونرمز:  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

★ خواص التكامل المحدود

$f$  و  $g$  دالتان مستمرتان على المجال  $I$ .  $a, b, c$  أعداد من  $I$ .

♦ علاقة شال

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

ينتج أن:  $\int_a^a f(x) dx = 0$  ،  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

♦ الخطية

$$k \in \mathbb{R} / \int_a^b (kf)(x) dx = k \int_a^b f(x) dx, \quad \int_a^b (f+g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

♦ المتباينات والتكامل المحدود

في حالة  $a \leq b$ : إذا كان من أجل كل  $x$  من المجال  $[a; b]$ ،  $f(x) \geq 0$  فإن  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

في حالة  $a < b$ : إذا كان من أجل كل  $x$  من المجال  $[a; b]$ ،  $f(x) > 0$  فإن  $\int_a^b f(x) dx > 0$  وعموماً

في حالة  $a \leq b$ : إذا كان من أجل كل  $x$  من المجال  $[a; b]$ ،  $f(x) \geq g(x)$  فإن  $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$

في حالة  $a < b$ : إذا كان من أجل كل  $x$  من المجال  $[a; b]$ ،  $f(x) > g(x)$  فإن  $\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx$

♦ القيمة المتوسطة

إذا كان  $a < b$  فإن القيمة المتوسطة للدالة  $f$  على المجال  $[a; b]$  هو العدد الحقيقي

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

♦ حصر القيمة المتوسطة

في حالة  $a < b$ : إذا كان من أجل كل  $x$  من المجال  $[a; b]$ ،  $m \leq f(x) \leq M$  فإن

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

★ التكامل بالتجزئة

$f$  و  $g$  دالتان قابلتان للاشتقاق على المجال  $I$ ، و المشتقتين  $f'$  و  $g'$  مستمرتين

على المجال  $I$ .  $a$  و  $b$  عدداً من  $I$ .

لدينا:  $\int_a^b f'(x)g'(x) dx = [f(x)g'(x)]_a^b - \int_a^b g(x)f''(x) dx$

### مبرهنة 1

إذا كانت الدالة  $f$  مستمرة على المجال  $I$  فإنه من أجل كل

عدد  $a$  من  $I$ ، الدالة  $F$  المعرفة بـ:  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  هي

الدالة الأصلية للدالة  $f$  على المجال  $I$  والتي تنعدم عند  $a$ .

★ حساب المساحات

المستوي منسوب إلى معلم متعامد  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، نضع:  $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ ،  $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$  و  $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$  مستطيل. مساحة المستطيل  $OIKJ$  تمثل وحدة القياس للمساحات في المعلم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . ونرمز:  $u.a$

♦ التفسير الهندسي للتكامل المحدود

$f$  دالة عددية للمتغير الحقيقي  $x$ .  $a$  و  $b$  عدنان من  $I$  حيث:  $a \leq b$  التكامل من  $a$  إلى  $b$  للدالة  $|f|$  هو المساحة  $A$  للحيز المستوي المحصور بين المنحني  $(C_f)$  الممثل للدالة  $f$  وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما  $x=a$  و  $x=b$ .

• في حالة  $f \geq 0$  في المجال  $[a; b]$ : لدينا  $A = \int_a^b f(x) dx (u.a)$

• في حالة  $f \leq 0$  في المجال  $[a; b]$ : لدينا  $A = - \int_a^b f(x) dx (u.a)$

♦ مساحة الحيز المحصور بين منحنين

$f$  و  $g$  دالتان مستمرتان على المجال  $[a; b]$ .  $(C_f)$  و  $(C_g)$  تمثيلاهما البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

المساحة  $A$  للحيز المستوي المحدد بالمنحنيين  $(C_f)$  و  $(C_g)$  والمستقيمين اللذين معادلتهما  $x=a$  و  $x=b$  يعطى بـ:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx (u.a)$$

♦ حساب الحجم

نفضاء منسوب إلى معلم متعامد  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ . نضع:  $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ ،  $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ ،  $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$  قطع المستقيمة  $[OI]$ ،  $[OJ]$ ،  $[OK]$  هي أضلاع في متوازي المستطيلات الذي حجمه  $\vec{k}$  وحدة القياس للحجوم.

جسم  $S$  محدّد بالمستويين اللذين معادلتهما:  $z=a$  و  $z=b$ . حيث:  $a \leq b$

كل مستو معادلته  $z=x$  حيث:  $x \in [a; b]$  يقطع الجسم  $S$  وفق مقطع مستو مساحته  $s(x)$  (وحدة مساحة). إذا كانت الدالة  $s$  مستمرة على المجال  $[a; b]$  فإن الحجم  $V$  للجسم  $S$  يعطى بالعلاقة:

$$V = \int_a^b s(x) dx \quad (وحدة الحجم).$$

نتيجة:  $f$  دالة مستمرة على المجال  $[a; b]$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني.

$\Gamma$  الحيز المستوي المحدّد بالمنحني  $(C_f)$  والمستقيمتين  $x=a$  و  $x=b$ .

حجم الجسم الدوراني المولّد بدوران  $\Gamma$  حول محور الفواصل يعطى بالعلاقة:  $V = \int_a^b \pi f(x) dx$

تأارين محلولة

حساب التكاملات

علما أنّها موجودة، أحسب التكاملات التالية:

$$\int_e^1 x \ln x dx, \int_2^{-3} e^{1-2x} dx, \int_2^0 t(t^2 - 1) dt, \int_1^2 (2x^3 - x + 2) dx$$

$$\int_0^\pi x \sin x dx, \int_\pi^{\pi/2} 2 \cos u \sin^2 u du$$

1

$$\text{الحل: } \int_1^2 (2x^3 - x + 2) dx = \left[ \frac{1}{2} x^4 - \frac{1}{2} x^2 + 2x \right]_1^2 = (8 - 2 + 4) - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 2 \right) = 12$$

$$\int_2^0 t(t^2 - 1) dt = \frac{1}{2} \int_2^0 (t^2 - 1)' (t^2 - 1) dt = \frac{1}{4} \left[ (t^2 - 1)^2 \right]_2^0 = \frac{1}{4} - \frac{9}{4} = -2$$

$$\int_2^{-3} e^{1-2x} dx = -\frac{1}{2} \int_2^{-3} e^{1-2x} dx = -\frac{1}{2} \left[ e^{1-2x} \right]_2^{-3} = -\frac{e^7}{2} + \frac{e^{-3}}{2}$$

$$\int_e^1 x \ln x dx \text{ نكامل بالتجزئة. لدى نضع: } f(x) = \ln x \text{ و } g'(x) = x$$

$$\text{ينتج أن: } f'(x) = \frac{1}{x} \text{ و } g(x) = \frac{1}{2} x^2$$

$$\int_e^1 x \ln x dx = \int_e^1 f'(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_e^1 - \int_e^1 g(x) f''(x) dx = \left[ \frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_e^1 - \frac{1}{2} \int_e^1 x dx$$

$$= -\frac{e^2}{2} - \frac{1}{4} (1 - e^2) = -\frac{1}{4} (1 + e^2)$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} 2 \cos u \sin^2 u du = 2 \int_{\pi/2}^{\pi} (\sin u)' \sin^2 u du = 2 \left[ \frac{1}{3} \sin^3 u \right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{2}{3}$$

$$\int_0^{\pi} x \sin x dx \text{ نكامل بالتجزئة. لدى نضع: } f(x) = x \text{ و } g'(x) = \sin x$$

$$\text{ينتج أن: } (f(x) = -\cos x \text{ و } f'(x) = 1)$$

$$\int_0^{\pi} x \sin x dx = \int_0^{\pi} f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} g(x) f'(x) dx$$

$$= [-x \cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = \pi$$

## حساب التكاملات

علما أنها موجودة، أحسب التكاملات التالية:

$$\int_0^{\pi} e^t \sin t dt, \quad \int_0^1 \ln(t+2) dt, \quad \int_1^2 \ln t dt$$

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt, \quad \int_e^1 \frac{\ln x}{x^2} dx, \quad \int_{\pi}^0 e^t \cos 2t dt$$

2

$$\text{الحل: } \int_1^2 \ln t dt \text{ نكامل بالتجزئة. نضع: } \begin{cases} u(t) = \ln t \\ v'(t) = 1 \end{cases} \text{ ينتج أن } \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t} \\ v(t) = t \end{cases}$$

$$\int_1^2 \ln t dt = [u(t)v(t)]_1^2 - \int_1^2 u'(t)v(t) dt = [t \ln t]_1^2 - [t]_1^2 = 2 \ln 2 - 1$$

$$\int_0^1 \ln(t+2) dt \text{ نكامل بالتجزئة. نضع: } \begin{cases} u(t) = \ln(t+2) \\ v'(t) = 1 \end{cases}$$

$$\text{ينتج أن } \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t+2} \\ v(t) = t+2 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \ln(t+2) dt = [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 u'(t)v(t) dt = [(t+2) \ln(t+2)]_0^1 - \int_0^1 dt$$

$$= 3 \ln 3 - 2 \ln 2 - 1$$

$$I = \int_0^{\pi} e^t \sin t dt \text{ نكامل بالتجزئة. نضع: } \begin{cases} u(t) = e^t \\ v'(t) = \sin t \end{cases} \text{ ينتج أن } \begin{cases} u'(t) = e^t \\ v(t) = -\cos t \end{cases}$$

$$I = \int_0^{\pi} e^t \sin t dt = [u(t)v(t)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u'(t)v(t) dt = [-e^t \cos t]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^t \cos t dt$$

$$= e^{\pi} + 1 + J$$

$$\text{نحسب من جديد التكامل } J = \int_0^{\pi} e^t \cos t dt \text{ بالتجزئة. نضع } \begin{cases} f(t) = e^t \\ g'(t) = \cos t \end{cases}$$

$$\text{ينتج أن } \begin{cases} f'(t) = e^t \\ g(t) = \sin t \end{cases}$$

$$J = \int_0^{\pi} e^t \cos t dt = [f(t)g(t)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(t)g(t) dt$$

$$= [e^t \sin t]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^t \sin t dt = -I$$

$$I = \frac{1}{2} (e^{\pi} + 1) \text{ وبالتالي: } I = e^{\pi} + 1 - I$$

$$K = \int_{\pi}^0 e^t \cos 2t dt \text{ نكامل بالتجزئة. نضع: } \begin{cases} u(t) = e^t \\ v'(t) = \cos 2t \end{cases}$$

$$\text{ينتج أن } \begin{cases} u'(t) = e^t \\ v(t) = \frac{1}{2} \sin 2t \end{cases}$$

$$K = \int_{\pi}^0 e^t \cos 2t dt = [u(t)v(t)]_{\pi}^0 - \int_{\pi}^0 u'(t)v(t) dt$$

$$= \left[ \frac{1}{2} e^t \sin 2t \right]_{\pi}^0 - \frac{1}{2} \int_{\pi}^0 e^t \sin 2t dt = -\frac{1}{2} L$$

$$\text{نحسب من جديد التكامل } L = \int_{\pi}^0 e^t \sin 2t dt \text{ بالتجزئة. نضع } \begin{cases} f(t) = e^t \\ g'(t) = \sin 2t \end{cases}$$

وبما أن:  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x}{x^2 + 1} \right) = 0$  فإن المنحني (C) يقبل مستقيم مقارب مائل ( $\Delta$ )

معادلته  $y = -x$  عند  $+\infty$  و  $-\infty$ .

الحيز هو مجموعة النقط  $M(x; y)$  حيث:

$$(-x \leq y \leq \frac{-x^3 + x}{x^2 + 1} \text{ و } 0 \leq x \leq 2) \text{ أو } (\frac{-x^3 + x}{x^2 + 1} \leq y \leq -x \text{ و } -2 \leq x \leq 0)$$

مساحته هي (u.a)  $\int_0^2 [y - (-x)] dx + \int_{-2}^0 [-x - y] dx$

$$\int_{-2}^0 \frac{-2x}{x^2 + 1} dx + \int_0^2 \frac{2x}{x^2 + 1} dx \quad (u.a) = [\ln(x^2 + 1)]_{-2}^0 - [\ln(x^2 + 1)]_0^2$$

وهي:  $= 2 \ln 5 \quad (u.a)$

### حساب مساحة الحيز المحصور بين منحنين

4  $f$  و  $g$  الدالتان المعرفتان على  $R$  بـ:  $f(x) = \cos x$  و  $g(x) = \sin x$   
احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنين  $(C_f)$  و  $(C_g)$  الممثلين  
للدالتين  $f$  و  $g$  وبالمستقيمين اللذين معادلتهما  $x = 0$  و  $x = \pi$ .

الحل: مساحة الحيز تعطى بالتكامل الحدود:  $\int_0^\pi |\cos x - \sin x| dx \quad (u.a)$

و علما أنه: من اجل كل  $x$  من  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$  فإن  $\cos x - \sin x \geq 0$

و من اجل كل  $x$  من  $\left[\frac{\pi}{4}; \pi\right]$  فإن  $\cos x - \sin x \leq 0$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi |\cos x - \sin x| dx (u.a) &= \left( \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^\pi (\sin x - \cos x) dx \right) (u.a) \\ &= ([\sin x + \cos x]_0^{\pi/4} + [-\cos x - \sin x]_{\pi/4}^\pi) (u.a) \\ &= 2\sqrt{2} (u.a) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} f'(t) = e^t \\ g(t) = -\frac{1}{2} \cos 2t \end{cases} \text{ ينتج أن}$$

$$L = \int_\pi^0 e^t \sin 2t dt = [f(t)g(t)]_\pi^0 - \int_\pi^0 f'(t)g(t) dt = \left[ -\frac{1}{2} e^t \cos 2t \right]_\pi^0 + \frac{1}{2} \int_\pi^0 e^t \cos 2t dt$$

إذا:

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^\pi + \frac{1}{2} K$$

$$K = \frac{1}{5} (-e^\pi + 1) \text{ وبالتالي: } K = -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} (e^\pi - 1) + \frac{1}{2} K \right]$$

$$\int_e^1 \frac{\ln x}{x^2} dx \text{ نكامل بالتجزئة. نضع: } \begin{cases} u(t) = \ln x \\ v'(t) = \frac{1}{x^2} \end{cases} \text{ ينتج أن } \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{x} \\ v(t) = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\int_e^1 \frac{\ln x}{x^2} dx = [u(t)v(t)]_e^1 - \int_e^1 u'(t)v(t) dt = \left[ -\frac{\ln x}{x} \right]_e^1 + \int_e^1 \frac{1}{x^2} dx = \frac{2}{e} - 1$$

إذا:

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt \text{ نكامل بالتجزئة. نضع: } \begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \frac{1}{\sqrt{t+1}} \end{cases} \text{ ينتج أن } \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = 2\sqrt{t+1} \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt = [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 u'(t)v(t) dt = [2t\sqrt{t+1}]_0^1 - 2 \int_0^1 \sqrt{t+1} dt$$

إذا:

$$= 2\sqrt{2} - \frac{4}{3} \left( 2^{\frac{3}{2}} - 1 \right) = \frac{-2\sqrt{2} + 4}{3}$$

### حساب المساحات

3 نعتبر المنحني (C) الذي معادلته  $y = \frac{-x^3 + x}{x^2 + 1}$  في المعلم المتعامد  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

• بين أن (C) يقبل مستقيم مقارب ( $\Delta$ ) عند  $+\infty$  و  $-\infty$ .

• احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) و المستقيم ( $\Delta$ )

والمستقيمين اللذين معادلتهما  $x = 2$  و  $x = -2$ .

الحل: لدينا من اجل كل  $x$  من  $R$ ,  $y = \frac{-x^3 + x}{x^2 + 1} = \frac{-x(x^2 + 1) + 2x}{x^2 + 1} = -x + \frac{2x}{x^2 + 1}$

## حساب الحجم

نعتبر الدالة  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على المجال  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  بالدستور

$$f(x) = \cos x$$

نعتبر مساحة اختيار  $\Omega$  المستوي المحصور بين المنحني الممثل للدالة  $f$  ومحور الفواصل في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس.

أحسب حجم الجسم الدوراني الناتج من دوران اختيار  $\Omega$  حول محور الفواصل.

5

$$V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \pi f^2(x) dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \pi \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos 2x + 1) dx$$

الحل: لدينا

$$= \frac{\pi}{2} \left[ \frac{1}{2} \sin 2x + x \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{2} (u.v)$$

## تمارين للتدريب

1. احسب التكاملات المحدودة التالية بعد التأكد من وجودها.

$$\int_1^{4u^2} (u-2+3e^{2u}) du, \int_0^{\pi/4} \frac{2 dt}{\cos^2 t}, \int_{-\pi}^0 -\sin 3x dx$$

$$\int_1^0 \frac{1-2x}{\sqrt{x^2-x+3}} dx, \int_{-1}^1 \frac{2x}{(x^2+2)^2} dx, \int_{\pi/4}^{\pi/6} \tan^2 x dx, \int_0^1 \sqrt{3x+1} dx$$

$$\int_0^{\pi/4} \tan^5 t (1 + \tan^2 t) dt, \int_e^{e^2} \frac{dt}{t \ln t}, \int_0^1 x e^{x^2} dx, \int_2^3 \frac{\ln x}{x} dx$$

2. باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب التكاملات المحدودة التالية:

$$\int_1^e x^2 \ln x dx, \int_2^0 (x-2)e^{1+2x} dx, \int_1^{-2} x e^{5x} dx, \int_1^e t \ln t dt$$

$$\int_{-\pi}^{3\pi/2} x^2 \cos 2x dx, \int_1^0 \frac{u}{\sqrt{2+u}} du, \int_2^1 \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) dx, \int_1^2 (\ln t)^2 dt$$

$$\int_1^e t(\ln t)^2 dt, \int_{-1}^1 (2x+3)^2 e^x dx, \int_0^{\pi} e^t \sin t dt, \int_1^2 \sin(\ln t) dt$$

$$3. f \text{ الدالة المعرفة على } \mathbb{R}^* \text{ بالدستور: } f(x) = \frac{-x^3 + 2x^2 + 3x + 2}{x^2}$$

اكتب الدالة  $f$  على شكل مجموع دوال بسيطة، ثم احسب  $\int_2^1 f(x) dx$ .

$$g \text{ الدالة المعرفة على } \mathbb{R} - \{-2; 2\} \text{ بالدستور: } g(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

عين ثلاثة أعداد حقيقية  $a, b, c$  بحيث من اجل كل  $x$  من  $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$

$$g(x) = a + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+2} \quad \text{احسب إذا: } \int_1^1 g(x) dx$$

$$h \text{ الدالة المعرفة على } \mathbb{R} - \{2\} \text{ بالدستور: } h(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{(x-1)^2}$$

عين ثلاثة أعداد حقيقية  $a, b, c$  بحيث من اجل كل  $x$  من  $\mathbb{R} - \{2\}$

$$h(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} \quad \text{احسب إذا: } \int_1^0 h(x) dx$$

$$4. f \text{ الدالة المعرفة على } \mathbb{R}^* \text{ بالدستور: } f(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$$

$$f(x) = a + \frac{be^x}{e^x - 1}, \quad \text{عين عددين حقيقيين } a, b \text{ بحيث من اجل كل } x \text{ من } \mathbb{R}^*$$

$$\text{ثم احسب } \int_2^1 f(x) dx$$

5. احسب القيمة المتوسطة للدالة  $f$  على المجال  $I$  في كل حالة:

$$f(x) = 2x^2 + 5x - 1 \text{ و } I = [-1; 3], \quad f(x) = \ln(x-1) \text{ و } I = [2; 4],$$

$$f(x) = e^{3x} \text{ و } I = [0; 3], \quad f(x) = \sin^2 x \text{ و } I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$f(x) = \cos^4 x \text{ و } I = \left[-\frac{\pi}{3}, 0\right], \quad f(x) = x^2 e^{x^3} \text{ و } I = [-1; 0]$$

$$6. (u_n) \text{ متتالية عددية معرفة على } N \text{ بالعلاقة: } u_n = 2 \int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{t^2 + 1} dt$$

- بين أنه من أجل كل  $n$  من  $N$ ،  $u_n \geq 0$ .
- بين أنه من أجل كل  $n$  من  $N$ ،  $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$ .
- احسب الحدود  $u_0, u_1, u_2$ .
- بين أن  $(u_n)$  متناقصة على  $N$ ، واستنتج أنها متقاربة، ثم تعرف على نهايتها.

$$7. f \text{ الدالة المعرفة على } [-1, 1] \text{ بالدستور: } f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

- ارسم التمثيل البياني للدالة  $f$  في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .
- $g$  الدالة المعرفة على  $[0, \pi]$  بالدستور:  $g(x) = F(\cos x)$  حيث  $F$  دالة أصلية للدالة  $f$  على  $[-1, 1]$ .

- بين أنه من أجل كل  $x$  من  $[0, \pi]$ ،  $g'(x) = \frac{1}{2}(\cos 2x - 1)$ ، ثم استنتج دالة أصلية للدالة  $g$  على  $[0, \pi]$ .

- احسب بدلالة  $F$  العدد:  $g(0) - g(\pi)$ ، ثم احسب  $\int_1^2 f(t) dt$ .
- ماذا تمثل النتيجة المحصل عليها؟

$$8. f' \text{ الدالة المعرفة على } R \text{ بالدستور: } f'(x) = -x + \frac{3}{2} + \frac{-x}{x^2 + 1}$$

- $(C_{f'})$  تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . (الوحدة  $2cm$ )
- ادرس تغيرات الدالة  $f$ ، وبين أن المستقيم  $(D)$  ذي المعادلة  $y = -x + \frac{3}{2}$  هو مستقيم مقارب للمنحني  $(C_{f'})$ .
- ارسم  $(D)$  و  $(C_{f'})$ .
- احسب بالسنتيمتر المربع مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني  $(C_{f'})$  والمستقيم  $(D)$  وبالمستقيمين ذوي المعادلتين  $x = -1$  و  $x = 2$ .

$$9. \varphi \text{ الدالة المعرفة على } R \text{ بالدستور: } \varphi(x) = (x-1)e^{x+1}$$

- $(C_\varphi)$  تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . (الوحدة  $1cm$ )
- ادرس تغيرات الدالة  $\varphi$  و ارسم تمثيلها البياني  $(C_\varphi)$ .

$$\text{احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني } (C_\varphi) \text{ والمستقيمات التي معادلاتها: } y=0 \text{ و } x=-1 \text{ و } x=\frac{3}{2}$$

$$\text{احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني } (C_\varphi) \text{ والمستقيمات التي معادلاتها: } y=0 \text{ و } x=1 \text{ و } x=-1$$

$$\text{استنتج مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني } (C_\varphi) \text{ وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتها: } x=\frac{3}{2} \text{ و } x=-1$$

$$10. f \text{ الدالة المعرفة على } R \text{ بـ: } f(0)=1 \text{ و من أجل } x \neq 0$$

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

- بين أن الدالة  $f$  مستمرة على  $R$ ، ثم احسب العدد  $f'(x)$  من أجل كل  $x$  من  $R^*$ .
- $g$  الدالة المعرفة على  $R$  بـ:  $g(x) = e^x - xe^x - 1$
- ادرس تغيرات الدالة  $g$ ، وتعرف على إشارة العدد  $g(x)$  على  $R$  ثم استنتج إشارة  $f'(x)$ .
- أعط اتجاه تغير الدالة  $f$ .

$$\text{• علّل وجود العدد } h(x) \text{ من أجل كل } x \text{ من } R \text{ حيث: } h(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$$

- عبر عن الدالة  $h$  باستعمال الدالة  $F$  حيث  $F$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $R$ .
- استنتج أن الدالة  $h$  تقبل الاشتقاق على  $R$  وبين أنه من أجل كل  $x$  من  $R$ ،

$$h'(x) = \frac{x}{e^{2x} - 1} (3 - e^x)$$

- تعرف على اتجاه تغير الدالة  $h$ .

- باستعمال خاصية الحصر للقيمة المتوسطة لدالة، بين أنه من أجل كل  $x$  من  $R^*$ ، العدد  $h(x)$  يقع بين  $f(x)$  و  $f(2x)$ .

$$\text{ميز بين الحالتين } x < 0 \text{ و } x > 0. \text{ أحسب إذاً } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x}$$

$$\text{ثم استنتج } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$$



## 6- الاحتمالات

### Hard equation

ما يجب أن يعرف:

★ العدة

◆ عاملي عدد طبيعي

تعريف

$n$  عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 1.

عاملي  $n$ ، هو العدد الطبيعي الذي نرمز له:  $n!$  والذي يساوي جداء الأعداد الطبيعية من 1 إلى  $n$ .

نكتب:  $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ . نقبل أن:  $0! = 1$ .

◆ عدة السلاسل

تجربة عشوائية تكمن في سحب  $p$  عنصر على التوالي من وعاء  $U$  يحوي  $n$  عنصر.

الوعاء  $U$  يعتبر مجموعة ذات  $n$  عنصر، ومخرج هذه التجربة تشكّل سلاسل ذات  $p$  عنصر من  $U$ .

السحب بالإرجاع

عدد السلاسل ذات  $p$  عنصر من  $U$ ، هو:  $n^p = \underbrace{n \times n \times \dots \times n}_p$  عامل (هذه السلاسل تدعى قوائم)

السحب بدون إرجاع

عدد السلاسل ذات  $p$  عنصر مختلفة من  $U$ ، هو:  $\underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)}_p$  عامل

(هذه السلاسل تدعى ترتيبات)

◆ توفيقات

تعريف

$E$  مجموعة ذات  $n$  عنصر،  $p$  عدد طبيعي حيث:  $0 \leq p \leq n$

توفيق ذات  $p$  عنصر من  $E$ ، هي مجموعة جزئية من  $E$  تضم  $p$  عنصر.

(تكرار العناصر غير ممكن وترتيبها غير مهم)

عدد التوفيقات ذات  $p$  عنصر من المجموعة  $E$  ذات  $n$  عنصر يرمز له  $\binom{n}{p}$

أو  $C_n^p$  ويعطى بالعلاقة:  $C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

للتحفظ

$n$  و  $p$  عددين طبيعيين حيث:  $0 \leq p \leq n$

•  $C_n^p = C_n^{n-p}$  ,  $C_n^1 = n$  ,  $C_n^n = 1$  ,  $C_n^0 = 1$

• من أجل  $1 < p \leq n$ ،

•  $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$  (قاعدة تشكّل مثلث باسكال)

• من أجل كل عددين حقيقيين  $a$  و  $b$  و من أجل كل  $n$  من  $N^*$ :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

دستور ثنائي  
الحد للنيوتن

★ الفضاء الاحتمالي المنته

◆ مجموعة الإمكانات-الحوادث

تعريف

نتائج التجربة العشوائية تشكّل مجموعة منتهية تدعى مجموعة

الإمكانات (مجموعة المخارج) يرمز لها  $\Omega$ .

كل جزء  $A$  من المجموعة  $\Omega$  يدعى حادثة.

مجموعة أجزاء  $\Omega$  هي مجموعة جميع الحوادث المرتبطة بالتجربة

العشوائية ويرمز لها  $P(\Omega)$ .

## ◆ مصطلحات على الحوادث

للحفظ

المصطلح الرياضي	المصطلح الاحتمالي
$A = \phi$	الحادثة المستحيلة
$A = \Omega$	الحادثة الأكيدة
$A = \{e_i\}$	الحادثة الأولية
$\bar{A}$ متممة المجموعة $A$	$\bar{A}$ الحادثة المعاكسة للحادثة $A$
$A \cap B = \phi$	$A$ و $B$ حادثتان غير متلازمتين

## ◆ قانون الاحتمال - الاحتمال

تعريف

$\Omega = \{e_1; e_2; \dots; e_n\}$  مجموعة الإمكانات لتجربة عشوائية معينة ذات  $n$  مخرج. قانون الاحتمال لتجربة عشوائية هو الدالة التي ترفق بكل حادثة أولية  $\{e_i\}$  من

$$P(\Omega) \text{ عدد } p_i \text{ من المجال } [0;1]. \text{ حيث: } \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

$p_i$  يدعى احتمال تحقق الحادثة الأولية  $\{e_i\}$ . ونرمز له بـ:  $p_i = p(\{e_i\})$ . الاحتمال المرفق بهذا القانون هو الدالة  $p$  المعرفة على  $P(\Omega)$  بما يلي:

$$p(\phi) = 0$$

وفي حالة  $A \neq \phi$ ،  $p(A)$  هو مجموع الأعداد  $p_i$  من أجل كل مخرج  $e_i$  من  $A$ . أي:  $p(A) = \sum_{e_i \in A} p_i$ . يدعى احتمال تحقق الحادثة  $A$ .

تعليقات

الاحتمال  $p$  هو دالة مجموعة تعريفها  $P(\Omega)$  وتأخذ قيمها في المجال  $[0;1]$ .

مجموعة الإمكانات  $\Omega$  مرفقة بالاحتمال  $p$  يرمز لها بـ:  $(\Omega; p)$  وتدعى فضاء احتمالي منته.

إذا كانت الحوادث الأولية لها نفس الاحتمال  $p_0$  فإننا نقول أن الحوادث متساوية الاحتمال. ولدينا:  $p_0 = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}$  / يرمز إلى عدد عناصر  $\Omega$ .

## ◆ خواص الاحتمال

$(\Omega; p)$  فضاء احتمالي منته.

$$p(\Omega) = 1$$

إذا كانتا  $A$  و  $B$  حادثتين من الفضاء فإن:  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ .

إذا كانت  $A$  حادثة من الفضاء فإن:  $p(A) = 1 - p(\bar{A})$ .

## ◆ المتغير العشوائي - قانون الاحتمال

تعريف

$(\Omega; p)$  فضاء احتمالي منته.

المتغير العشوائي  $X$  هو كل دالة معرفة على مجموعة الامكانيات  $\Omega$  وتأخذ قيمها في  $R$ .

$$X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$$
 تدعى مجموعة قيم المتغير العشوائي  $X$ .

قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$ ، هو الدالة التي ترفق بكل قيمة  $x_i$  من  $X(\Omega)$  عدد  $p_i$  من المجال  $[0;1]$ . حيث:

$$p_i = p(X = x_i) = \frac{\text{Card}(X = x_i)}{\text{Card}(\Omega)} \text{ و } \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

## ◆ الأمل الرياضي - التباين - الانحراف المعياري

تعريف

$(\Omega; p)$  فضاء احتمالي منته. المتغير العشوائي المعروف على  $\Omega$

$$X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$$
 مجموعة قيمه.

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i \text{ هو الأمل الرياضي للمتغير العشوائي } X \text{ حيث } p_i = P(X = x_i)$$

(يدعى كذلك المتوسط الحسابي ويرمز له  $\bar{X}$ )

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - \bar{X})^2 \text{ هو التباين للمتغير العشوائي } X \text{ حيث } p_i = P(X = x_i)$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$
 ويعطى كذلك بـ:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \text{ هو الانحراف المعياري للمتغير العشوائي } X$$

## ★ الاحتمال الشرطي

**تعريف**  $(\Omega; p)$  فضاء احتمالي منته.  $A$  و  $B$  حادثتان من  $\Omega$  حيث:  
 $p(A) \neq 0$

"احتمال تحقق  $B$  علما أن  $A$  تحقق" هو الاحتمال  $p_{A|}$  المعروف بما يلي:  
 $p_{A|}(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$  .  $p_{A|}$  يدعى الاحتمال الشرطي علما  $A$ .

## ◆ الحوادث المستقلة

**تعريف**

$(\Omega; p)$  فضاء احتمالي منته.  $A$  و  $B$  حادثتان من  $\Omega$ .

الحادثتان  $A$  و  $B$  مستقلتان عشوائيا إذا فقط إذا كان

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

## ◆ دستور الاحتمالات الكلية

**مبرهنة 1**

$(\Omega; p)$  فضاء احتمالي منته،  $A_1, A_2, \dots, A_n$  حوادث من هذا الفضاء تشكّل تجزئة له.

من أجل كل حادثة  $B$  من الفضاء  $(\Omega; p)$ ، لدينا:

$$p(B) = p(A_1) \times p_{A_1|}(B) + p(A_2) \times p_{A_2|}(B) + \dots + p(A_n) \times p_{A_n|}(B)$$

$$\text{أي: } p(B) = \sum_{i=1}^n p(A_i) \times p_{A_i|}(B) = \sum_{i=1}^n p(A_i \cap B)$$

## ◆ المتغيرات العشوائية المستقلة

$(\Omega; p)$  فضاء احتمالي منته،  $X$  و  $Y$  المتغيران العشوائيان المعروفان على  $\Omega$ .

$X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$  و  $Y(\Omega) = \{y_1; y_2; \dots; y_m\}$  مجموعتا قيمهما.

$X$  و  $Y$  مستقلان معناه من أجل كل  $1 \leq i \leq n$  و من أجل كل  $1 \leq j \leq m$ ،  
 الحادثتان  $(X = x_i)$  و  $(Y = y_j)$  مستقلتان.

**للحفظ**

$X$  و  $Y$  متغيران عشوائيان مستقلان

$$E(XY) = E(X) \times E(Y) \quad \text{و} \quad E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

## ◆ التجارب العشوائية المستقلة

$(\Omega_1; p_1), (\Omega_2; p_2), \dots, (\Omega_n; p_n)$  فضاء احتمالي منته لـ  $n$  تجربة عشوائية معينة.

$n$  تجربة عشوائية تكون مستقلة إذا فقط إذا كان احتمال سلسلة الحوادث

$(A_1, A_2, \dots, A_n)$  حيث  $A_i$  حادثة من  $\Omega_i$  هو:  $p_1(A_1) \times p_2(A_2) \times \dots \times p_n(A_n)$

## ★ قوانين الاحتمالات

## ◆ قانون برنولي (Bernoulli) - قانون ثنائي الحد (binomiale)

**تعريف**

نعتبر تجربة عشوائية ذات مخرجين  $A$  و  $\bar{A}$ ، [يدعيان النجاح والإخفاق].

ونضع: احتمال تحقق  $A$  هو  $\alpha$  واحتمال تحقق  $\bar{A}$  هو  $(1-\alpha)$  حيث:  $\alpha \in ]0; 1[$ .

قانون برنولي  $B_\alpha$  هو قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$  والذي

يرفق بالمخرج  $A$  القيمة 1 ويرفق بالمخرج  $\bar{A}$  القيمة 0.

التجربة العشوائية ذات مخرجين تدعى تجربة برنولي

## ◆ خواص

• من أجل قانون برنولي  $B_\alpha$  للمتغير العشوائي  $X$  المعروف سابقا:

أمله الرياضي هو:  $E(X) = \alpha$  و تباينه هو:  $V(X) = \alpha(1-\alpha)$ .

• من أجل  $\alpha \in ]0; 1[$ . نكرّر تجربة برنولي العشوائية  $n$  مرة

— نفرض أن التجارب العشوائية مستقلة—

ونعتبر المتغير العشوائي  $Y$  الذي يأخذ كقيم، عدد المرات التي يتحقق فيها المخرج  $\alpha$ .

تعريفًا: قانون الاحتمال للتغير العشوائي  $Y$  يدعى قانون ثنائي الحد وسيطاه  $n$  و  $\alpha$ ، ويرمز له:  $B(n; \alpha)$ . معرّف بما يلي:

من أجل كل عدد طبيعي  $k$  حيث:  $0 \leq k \leq n$  لدينا،  $p(Y=k) = C_n^k \alpha^k (1-\alpha)^{n-k}$  و لدينا كذلك:  $E(Y) = n\alpha$  و  $V(Y) = n\alpha(1-\alpha)$

### \* قوانين الاحتمال المستمرة

نعتبر فيما يلي  $(I; p)$  فضاء احتمالي غير منته، حيث  $I$  مجال غير منته من  $\mathbb{R}$ .

### ◆ قانون التوزيعات المنتظمة على المجال $[0;1]$

#### تعريف

قانون التوزيعات المنتظمة على المجال  $[0;1]$  يهدف إلى الاختيار العشوائي لعدد من المجال  $[0;1]$ .

$a$  و  $b$  عدداً من المجال  $[0;1]$  حيث:  $a \leq b$ .

إذا كان  $J$  أحد المجالات الأربعة المحددة بالعددين  $a$  و  $b$  (أي  $J = [a; b]$  أو  $J = [a; b[$  أو  $J = ]a; b]$  أو  $J = ]a; b[$  ...)

فإن الاحتمال  $P$  المعرّف بقانون التوزيعات المنتظمة على  $[0;1]$  يحقق:  $P(J) = b - a$ .

#### خواص

الاحتمال  $P$  المعرّف بقانون التوزيعات المنتظمة على  $[0;1]$  يحقق كذلك:

•  $P(\emptyset) = 0$  و  $P([0;1]) = 1$  و من أجل  $x$  من المجال  $[0;1]$ ،  $P(\{x\}) = 0$ .

• إذا كان  $J_1$  و  $J_2$  مجالين منفصلين من  $[0;1]$  فإن  $P(J_1 \cup J_2) = P(J_1) + P(J_2)$ .

• إذا كان  $\bar{J}$  متممة المجال  $J$  إلى  $[0;1]$  فإن  $P(\bar{J}) = 1 - P(J)$ .

• في قانون التوزيعات المنتظمة على  $[0;1]$ ، احتمال تحقق أي مجال من  $[0;1]$  هو طوله.

### ◆ القانون الأسّي

#### تعريف

$\lambda$  عدد حقيقي موجب تماماً، و  $f_\lambda$  الدالة العددية المعرّفة على

المجال  $I = [0; +\infty[$  بالدستور:  $f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ .

الاحتمال  $p$  على المجال  $I$  يعرّف القانون الأسّي إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

• من أجل كل مجال  $J$  من  $I$  حده  $a$  و  $b$  (حيث  $a$  و  $b$  عنصران من  $I$  و  $a \leq b$ )

لدينا:  $p(J) = \int_a^b f_\lambda(x) dx$ .

• من أجل كل مجال  $J$  حيث:  $J = [a; +\infty[$  ( $a$  عنصر من  $I$ ) لدينا:

$p(J) = 1 - p([0; a])$ .

#### تعليق

احتمال تحقق المجال  $[a; b]$  يفسّر هندسياً، بمساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى

الممثل للدالة  $f_\lambda$  وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما  $x=a$  و  $x=b$ .

### \* قانون احتمال مستمر ذات كثافة

#### تعريف

•  $f$  دالة مستمرة وموجبة تماماً على المجال  $I = [a; b]$  من  $\mathbb{R}$ ، حيث:  $\int_a^b f(t) dt = 1$ .

نعرّف الاحتمال  $p$  على المجال  $I$  كما يلي:

من أجل كل مجال  $J$  من  $I$  حده  $c$  و  $d$  حيث  $c \leq d$ ،  $p(J) = \int_c^d f(t) dt$ .

•  $f$  دالة مستمرة وموجبة تماماً على المجال  $I = [a; +\infty[$  من  $\mathbb{R}$ ، حيث:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt = 1$$

نعرّف الاحتمال  $p$  على المجال  $I$  كما يلي:

من أجل كل مجال  $J$  من  $I$  حده  $c$  و  $d$  حيث  $c \leq d$ ،  $p(J) = \int_c^d f(t) dt$ .

ومن أجل كل مجال  $K$  من  $I$  حيث:  $K = [c; +\infty[$  أو  $K = ]c; +\infty[$

مع  $a \leq c$ ،  $p(K) = 1 - \int_a^c f(t) dt$ .

في الحالتين  $p$  يعرّف قانون الاحتمال على المجال  $I$ ، والدالة  $f$  تدعى الكثافة.

## للحفظ

قانون التوزيعات المنتظمة على  $[0;1]$ ، هو قانون احتمال مستمر ذو كثافة وهي الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $[0;1]$  بالدستور:  $f(x) = 1$ .  
القانون الأسّي الذي وسيطه  $\lambda$ ، المعروف على  $R_+$  هو قانون احتمال مستمر ذو كثافة وهي الدالة  $f$  المعرفة على  $R_+$  بالدستور:  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ .

## تمارين محلولة

## الاحتمال الشرطي

نلقي زهرة نرد رباعية الوجوه، مرتين على التوالي نعمل أوجهها الأربعة لأرقام من 1 إلى 4.

- 1 نختتم بمجموع الرقمين اللذين يظهران بعد الرميّتين. احسب احتمال:
- المجموع يساوي 6 علما أن الرمية الأولى أعطت الرقم 3.
  - المجموع يساوي على الأقل 7 علما أن الرمية الأولى أعطت الرقم 2.

الحل:  $(\Omega; p)$  فضاء احتمالي منته، حيث  $Card(\Omega) = 4^2 = 16$ ، و  $A, B$  حادثتين من  $\Omega$  حيث:  $p(A) \neq 0$

$A$ : حادثة "المجموع يساوي 6" لدينا:  $A = \{(2;4); (4;2); (3;3)\}$ .

$B$  حادثة "الرمية الأولى تعطي 3" لدينا:  $B = \{(3;1); (3;2); (3;3); (3;4)\} \neq \emptyset$

و  $A \cap B = \{(3;3)\}$

إذا: الاحتمال أن يكون المجموع يساوي 6 علما أن الرمية الأولى أعطت الرقم 3

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{16}{4} = \frac{1}{4} \text{ هو:}$$

$A'$  حادثة "المجموع أكبر من أو يساوي 7" لدينا:  $A' = \{(3;4); (4;3); (4;4)\}$

$B'$  حادثة "الرمية الأولى تعطي 2" لدينا:  $B' = \{(2;1); (2;2); (2;3); (2;4)\} \neq \emptyset$

$$A' \cap B' = \emptyset$$

إذا: الاحتمال أن يكون المجموع يساوي على الأقل 7 علما أن الرمية الأولى أعطت الرقم 2

$$p_{B'}(A') = \frac{p(A' \cap B')}{p(B')} = 0 \text{ هو:}$$

## توضيف شجرة الاحتمالات واستعمال دستور الاحتمالات الكلية

في دراسة إحصائية تجمع سكاني معين، أفادت أن 10% من الأشخاص يحملون فيروسا ما.

إجراءات فحص استعجالية أُخذت في هذا التجمع السكاني لتعرف على هؤلاء الأشخاص. فلو حظ أنه من بين الأشخاص الحاملين لهذا الفيروس 95% كان فحصهم ايجابي (فعلا حاملون للفيروس) ومن بين الأشخاص غير الحاملين لهذا الفيروس 4% فحصهم كان ايجابي.

نختار عشوائيا شخصا من هذا التجمع ونجرى له الفحص.

$A$  الحادثة "الشخص حامل للفيروس"

و  $B$  الحادثة "الفحص ايجابي".

• احسب احتمال الحوادث:  $A \cap B$ ,  $\bar{A} \cap B$ ,  $B$ .

• احسب الاحتمالين:  $p_B(A)$ ,  $p_B(\bar{A})$ .

الحل: حساب احتمال الحوادث  $A \cap B$ ,  $\bar{A} \cap B$  نستعمل شجرة الاحتمالات التالية:

(ترسم في نهاية الحل) لحساب احتمال الحادثة  $B$  نستعمل دستور الاحتمالات الكلية. وذلك باعتبار أن  $A$  و  $\bar{A}$  هما الحادثتين في مجموعة الإمكانات.

$$p(B) = p(A) \times p_{|A}(B) + p(\bar{A}) \times p_{|\bar{A}}(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = \frac{131}{1000}$$

$p_B(A)$  هو احتمال تحقق الحادثة  $A$  علما أن الحادثة  $B$  تحققت وحسب شجرة الاحتمالات

**الحل:** نختار مجموعة الإمكانات الموافقة لقانون برنولي مثلاً  $\Omega = \{B; N\}$  حيث:  $B$  هو

الأبيض و  $N$  هو الأسود

ولدينا:  $p(\{B\}) = \frac{2}{5}$  و  $p(\{N\}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

نعرف بالسجبة المكررة أربع مرات مع الإرجاع، قانون ثنائي الحد وسيطاه 4 و  $\frac{3}{5}$ .

إذا احتمال سحب بالضبط ثلاث كرات هو:

$$p(X=3) = C_4^3 \left(\frac{3}{5}\right)^3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^1 = 4 \times \frac{54}{625} = 0.3456$$

معدل الكرات السوداء المسحوبة هو الأمل الرياضي للمتغير العشوائي لقانون ثنائي الحد

وسيطاه 100 و  $\frac{3}{5}$  وهو  $E(X) = 100 \times \frac{3}{5} = 60$ .

### كثافة الاحتمال

في كل حالة أذكر إن كانت الدالة هي كثافة احتمال.

• الدالة  $f$  معرفة على المجال  $[0;1]$  بالدستور  $f(x) = x^2$ .

• الدالة  $g$  معرفة على المجال  $[0;1]$  بالدستور  $g(x) = 4x^3$ .

• الدالة  $h$  معرفة على المجال  $[1;2]$  بالدستور  $h(x) = 4x^3$ .

• الدالة  $k$  معرفة على المجال  $[-1;0]$  بالدستور  $k(x) = 4x^3$ .

• الدالة  $l$  معرفة على المجال  $[2;+\infty[$  بالدستور  $l(x) = \frac{2}{x^2}$ .

4

**الحل:** لدينا  $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3} \neq 1$  إذا الدالة  $f$  لا تمثل كثافة احتمال.

لدينا  $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 4x^3 dx = \left[x^4\right]_0^1 = 1$  وبما أن الدالة  $g$  مستمرة وموجبة على  $[0;1]$  فإنها تمثل كثافة احتمال على  $[0;1]$ .

لدينا  $\int_1^2 h(x)dx = \int_1^2 4x^3 dx = \left[x^4\right]_1^2 = 15 \neq 1$  إذا الدالة  $h$  لا تمثل كثافة احتمال.

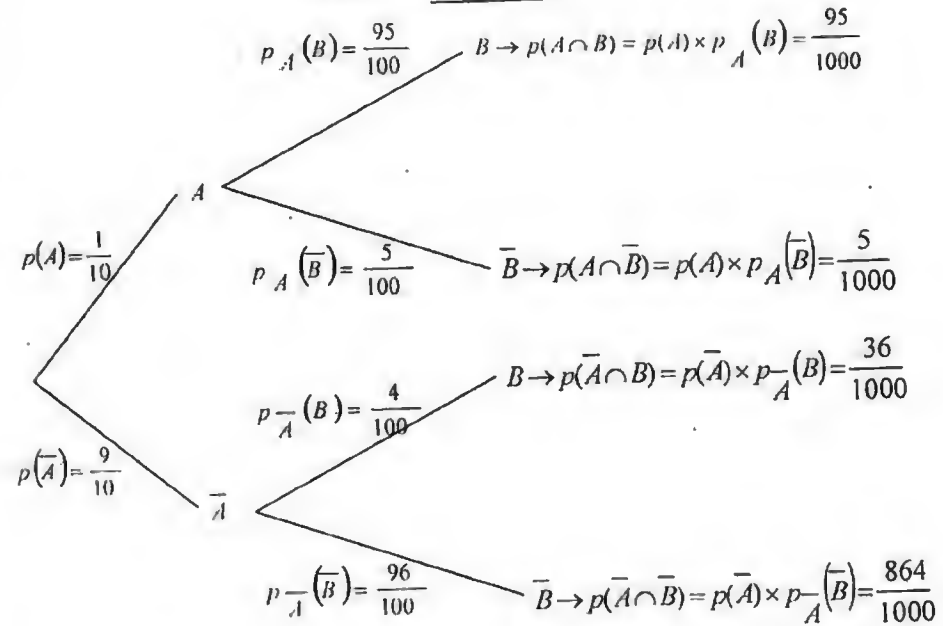
الدالة  $k$  لا تمثل كثافة احتمال على المجال  $[-1;0]$ ، كونها غير موجبة على  $[-1;0]$ .

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{95}{131}$$

$p_B(\bar{A})$  هو احتمال تحقق الحادثة  $\bar{A}$  علماً أن الحادثة  $B$  تحققت وحسب شجرة الاحتمالات

$$p_B(\bar{A}) = \frac{p(\bar{A} \cap B)}{p(B)} = \frac{36}{131}$$

### الشجرة (العنكبوتية)



### قانون برنولي

يحوي صندوق خمس كرات لا تميز بينها عند اللمس (2 بيضاء و 3 سوداء)

• نسحب من هذا الصندوق كرة واحدة، كيف يمكننا اختيار مجموعة

الإمكانات التي توافق قانون برنولي في هذه الحالة؟

• نجري أربع سحبات لكرة من الصندوق مع الإرجاع - السحبات الأربع مستقلة -

ما احتمال سحب بالضبط ثلاث كرات سوداء؟.

• نعيد عملية سحب كرة من الصندوق 100 مرة مع الإرجاع، ما هو

معدل الكرات السوداء المسحوبة؟

3

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_2^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_2^x \left(\frac{2}{t}\right) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{2}{t}\right]_2^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right) = 1$

وبما أن الدالة / مستمرة وموجبة على  $[2; +\infty[$  فإنها تمثل كثافة احتمال على  $[2; +\infty[$ .

### قانون الاحتمال للمتغير العشوائي المستمر

5	المتغير العشوائي المستمر، والدالة $f'$ كثافة الاحتمال المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بالدستور: $f'(x) = e^{-x}$ علّل كون $f'$ كثافة احتمال واحسب احتمال الحادثة $1 \leq X \leq 2$ .
---	---

**الحل:** الدالة  $f': X \rightarrow e^{-x}$  معرفة وقابلة للاشتقاق على كامل  $f'$  وبخصوص على  $[0; +\infty[$ . فهي إذاً مستمرة على  $[0; +\infty[$ . ومن أجل كل  $x$  من  $R$ ،  $e^{-x} > 0$ . أي الدالة  $f'$  موجبة على  $[0; +\infty[$ .

ولدينا:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-e^{-t}]_0^x = 1$

مما سبق فإن الدالة  $f'$  كثافة احتمال على المجال  $[0; +\infty[$ .

$$p([1; 2]) = p(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_1^2 = e^{-1} - e^{-2} \approx 0.23$$

### القانون الأسّي

6	جهاز كهربائي يشتغل ببطاريتين $P_1$ و $P_2$ . المتغير العشوائي الذي يرقى بكل بطارية من النوع $P_1$ المدة الزمنية لصلاحيتها بالساعة، و $X_2$ المتغير العشوائي الذي يرقى بكل بطارية من النوع $P_2$ المدة الزمنية لصلاحيتها بالساعة. نفرض أن المتغيران العشوائيان $X_1$ و $X_2$ مستقلان ويتبعان نفس القانون الأسّي الذي كثافته الدالة $f'$ المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بالدستور: $f'(x) = 0.001e^{-0.001x}$ نفرض أن الجهاز يتوقف عن التشغيل بمجرد نفاد إحدى البطاريتين. • احسب احتمال توقف الجهاز عن التشغيل في حدود 500 ساعة. • احسب احتمال كون الجهاز في حدود 1000 ساعة لا يزال يشتغل.
---	---

**الحل:** احتمال توقف الجهاز عن التشغيل في حدود 500 ساعة، يعني

احتمال أن تكون المدة الزمنية لصلاحية إحدى البطاريتين على الأقل  $P_1$  أو  $P_2$  أصغر من أو تساوي 500 ساعة. هو:

$$\begin{aligned} p((X_1 \leq 500) \cup (X_2 \leq 500)) &= p(X_1 \leq 500) + p(X_2 \leq 500) - p((X_1 \leq 500) \cap (X_2 \leq 500)) \\ &= p(X_1 \leq 500) + p(X_2 \leq 500) - p(X_1 \leq 500) \times p(X_2 \leq 500) \\ &= 2 \int_0^{500} 0.001e^{-0.001x} dx - \left( \int_0^{500} 0.001e^{-0.001x} dx \right)^2 \approx 0.63 \end{aligned}$$

احتمال كون الجهاز في حدود 1000 ساعة لا يزال يشتغل، يعني

احتمال أن تكون المدة الزمنية لصلاحية كلا البطاريتين  $P_1$  و  $P_2$  أكبر من أو تساوي 1000 ساعة. هو:

$$\begin{aligned} p((X_1 \geq 1000) \cap (X_2 \geq 1000)) &= p(X_1 \geq 1000) \times p(X_2 \geq 1000) \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{1000}^x 0.001e^{-0.001t} dt \right)^2 = e^{-2} \end{aligned}$$

### تمارين للتدريب

1. بسّط العبارات التالية:  $\frac{n!}{(n+1)!}$ ،  $6! \left( \frac{9}{8!} - \frac{1}{7!} \right)$ ،  $\frac{6!5!}{3!4!}$ ،  $\frac{12!}{15!}$

$$\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$$

باستعمال الرمز ! أعط كتابة أخرى لكل من الأعداد التالية:

$$n(n+1)(n+2)$$

$$\frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{3 \times 2}$$

أنشر ثنائيات الحد التالية:  $(2x-1)^6$ ،  $(2a-3b)^4$ ،  $(a+1)^5$

باستعمال نشر ثنائي الحد  $(a-1)^n$  برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي زوجي

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots + C_n^n = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots + C_n^{n-1}$$

لدينا: دون النشر، أعط معامل  $x^4$  في نشر ثنائي الحد  $(2x-1)^6$ .



أنشئ الأسطر الخمسة الأولى لثلث باسكال، ثم احسب الأعداد  $11^3$ ،  $11^4$  باستعمال مثلث باسكال. باستعمال دستور ثنائي الحد، أشرح الظاهرة الملاحظة، ثم فسّر كيف أن هذه الظاهرة لا تصلح من أجل العدد  $11^5$ .

2. وعاء  $U_1$  يحتوي كرتين حمراوين وكرة خضراء. وعاء  $U_2$  يحتوي كرة حمراء وكرتين خضراوين.

المرحلة الأولى: نلقي زهرة الترد المكعبة متقنة الصنع.

المرحلة الثانية: إذا ظهر الوجه 6 فإننا نسحب كرة من الوعاء  $U_1$ ، وإذا لم يظهر 6 فإننا نسحب الكرة من الوعاء  $U_2$ .

احسب احتمال تحقق كلا من الحادثتين:  $A$ : نحصل في الزهرة على 6 ونسحب كرة حمراء.  $B$ : الحصول على كرة حمراء في نهاية المرحلة الثانية.

3. يحتوي وعاء 4 كرات مرقمة من 1 إلى 4.

نسحب على التوالي ثلاث كرات مع الإرجاع، ونعتبر المتغير العشوائي  $X$  الذي يرفق بكل سحبة أصغر رقم يظهر في الكرات الثلاث. عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$ .

4. يحتوي وعاء عشر كرات مرقمة من 1 إلى 10. نسحب من هذا الوعاء بالصدفة وفي آن واحد أربع كرات ونهتم بالأرقام التي تحملها.

ما هو عدد مخرج هذا النشاط؟

احسب احتمال تحقق كلا من الحوادث التالية:

$A$  نحصل على رقم واحد مضاعف ثلاثة.  $C$  نحصل بالضبط على رقمين مضاعفين لثلاثة.  $B$  لا نحصل على أي عدد مضاعف ثلاثة.  $D$  نحصل على الأقل على رقم مضاعف ثلاثة.

5. ينقسم مصنع إلى ثلاث وحدات  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$  لإنتاج المصابيح الكهربائية.

وحدة الإنتاج  $\alpha$  تغطي 20% من إنتاج المصنع منها 5% غير صالحة للاستعمال.

وحدة الإنتاج  $\beta$  تغطي 30% من إنتاج المصنع منها 4% غير صالحة للاستعمال.

وحدة الإنتاج  $\gamma$  تغطي 50% من إنتاج المصنع منها 1% غير صالحة للاستعمال.

نختار بالصدفة مصباح، احسب احتمال كلا من الحوادث التالية.

$A$ : المصباح غير صالح وتنتجه الوحدة  $\alpha$ .

$B$ : المصباح غير صالح وتنتجه الوحدة  $\gamma$ .

$C$ : المصباح غير صالح وتنتجه الوحدة  $\beta$ .

6. يلعب نسيم لعبة معينة ذات عدة جولات بحيث جطوظ الريج في الجولة الأولى تعادل جطوظ الإخفاق فيها.

نفرض أنه، عندما يربح نسيم جولة فإن احتمال ربح الجولة التي تليها هو 0.6. عندما يخفق نسيم في جولة فإن احتمال الإخفاق في الجولة التي تليها هو 0.7.

من أجل العدد الطبيعي  $n$ ، نضع:  $A_n$  حادثة "يربح نسيم الجولة من الرتبة  $n$ ".

$B_n$  حادثة "يخفق نسيم في الجولة من الرتبة  $n$ ".

• احسب احتمال الحوادث  $A_1$ ،  $B_1$  و  $A_2$  واستنتج احتمال الحادثة  $B_2$ .

• نضع: من أجل كل  $n$  من  $N^*$ :  $X_n = P(A_n)$  و  $Y_n = P(B_n)$

يبين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$ ،  $X_{n+1} = 0.6X_n + 0.3Y_n$

$$Y_{n+1} = 0.4X_n + 0.7Y_n$$

• نضع: من أجل كل  $n$  من  $N^*$ :  $V_n = X_n + Y_n$  و  $W_n = 4X_n - 3Y_n$

يبين أن المتتالية  $(V_n)$  ثابتة.

• بين أن المتتالية  $(W_n)$  هندسية، ثم عبّر عن  $W_n$  و  $X_n$  بدلالة  $n$ .

أدرس تقارب المتتالية العددية  $(X_n)$ .

7. حارس مرمى في كرة القدم يحقق احتمال لصد الضربات الترجيحية يقدر بـ: 0.3.

يتعرض هذا الحارس لخمس ضربات ترجيحية - (نفرض أن هذه الضربات مستقلة).

ما احتمال أن يتصدى هذا الحارس لرمية على الأقل؟. ما احتمال أن يتصدى هذا الحارس

للمرات الخمس؟.

8.  $p$  احتمال مرافق للقانون الأسّي الذي كثافته الدالة  $f$  المعرفة على  $[0; +\infty[$

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

عيّن العدد الحقيقي الموجب تماماً  $\lambda$  بحيث يكون:  $p([0; 2]) = \frac{e^4 - 1}{e^4}$

9. قرّر محمد زيارة مغارة لشراء بعض الحاجيات. دخل محمد المغارة عشوائياً بين الساعة 11:00 و الساعة 12:00 على أن لا تزيد حوّلته عن 10 دقائق.

ما احتمال أن يتمكن محمد من الاستفادة من التخفيضات التي ستعرضها إدارة المغارة في المدة الزمنية من 11:45 إلى 12:15؟

10. قانون التوزيعات المنتظمة على المجال  $[a; b]$  حيث:  $a < b$  يهتم بسحب عدد حقيقي بطريقة عشوائية من المجال  $[a; b]$ .

يتميّز هذا القانون بالخاصة التالية: احتمال كل مجال من  $[a; b]$  متناسب مع طوله.

نفرض أن قانون التوزيعات المنتظمة على المجال  $[a; b]$  هو قانون احتمال مستمر ذات كثافة. أي أنه توجد دالة  $f$  معرفة ومستمرة على المجال  $[a; b]$  بحيث: من أجل كل مجال  $[c; d]$  محتوي في

$$p([c; d]) = \int_c^d f(t) dt$$

نهدف في هذا التمرين إلى تعيين الدالة  $f$ .

• لنكن  $F$  دالة أصلية للدالة  $f$ .

بيّن أنه يوجد عدد حقيقي  $k$  بحيث، من أجل كل مجال  $[c; d]$  محتوي في  $[a; b]$  لدينا:

$$F(d) - F(c) = k(d - c)$$

• نعتبر العدد  $x_0$  من المجال  $[a; b]$ ، بيّن أن الدالة  $F$  تقبل الاشتقاق عند  $x_0$ ، واحسب  $F'(x_0)$ .

• استنتج أن الدالة  $f$  ثابتة على المجال  $[a; b]$ .

• باستعمال المساواة  $p([a; b]) = 1$  أعط عبارة  $f(t)$  من أجل كل  $t$  من  $[a; b]$ .

• ارسم التمثيل البياني للدالة  $f$  على المجال  $[a; b]$ ، وفسر هندسياً النتائج المحصل عليها سابقاً (خذ  $a = -1$  و  $b = 4$ )

تطبيق: نختار عشوائياً عدداً من المجال  $[-1; 4]$  ما احتمال أن يكون هذا العدد في المجال  $[0; 1]$ ؟

ما احتمال أن يكون هذا العدد أصغر من 0.39 - علماً أنه سالب؟

## 7- الأعداد المركبة

Hard equation

ما يجب أن يعرف:

★ الأعداد المركبة - التمثيل الهندسي

◆ العدد المركب

تعريف العدد المركب هو عدد من الشكل  $x + iy$  حيث:  $x$  و  $y$  عدداً حقيقيين و  $i^2 = -1$ .

حقيقيان و  $i$  عدد تخيلي يحقق  $i^2 = -1$ .

نرمز بجموعة الأعداد المركبة بالرمز  $\mathbb{C}$ .

لِلحِفْظ

الكتابة  $z = x + iy$  للعدد المركب حيث:  $x$  و  $y$  عدداً حقيقيين

تدعى الشكل الجبري للعدد المركب  $z$

$x$  يدعى الجزء الحقيقي للعدد المركب  $z$  ويرمز له  $\text{Re}(z)$ .

$y$  يدعى الجزء التخيلي للعدد المركب  $z$  ويرمز له  $\text{Im}(z)$ .

من أجل كل عدد مركب  $z$ ،  $z$  عدد حقيقي إذا وفقط إذا كان  $\text{Im}(z) = 0$ .

$z$  عدد تخيلي إذا وفقط إذا كان  $\text{Re}(z) = 0$ .

$z = x + iy$  و  $z' = x' + iy'$  عدداً مركبين كتبنا بشكلهما الجبري

$z = z'$  يكافئ  $x = x'$  و  $y = y'$  ،  $z = 0$  يكافئ  $x = 0$  و  $y = 0$

$z + z' = (x + x') + i(y + y')$  مجموع عددين مركبين

$z \times z' = (xx' - yy') + i(xy' + yx')$  جداء عددين مركبين

## ◆ التمثيل الهندسي

$(O; \vec{i}; \vec{j})$  معلم للمستوي متعامد ومتجانس مباشر.

• لكل عدد مركب  $z = x + iy$  (حيث:  $x$  و  $y$  عددان حقيقيان) نرفق

النقطة  $M$  من المستوي إحداثياتها  $(x; y)$  في المعلم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، أو نرفق

الشعاع  $\overrightarrow{OM}$  إحداثياته  $(x; y)$  في نفس المعلم.

$M$  تدعى النقطة الصورة للعدد المركب  $z$ .

$\overrightarrow{OM}$  يدعى الشعاع الصورة للعدد المركب  $z$ .

• لكل نقطة  $M$  من المستوي إحداثياتها  $(x; y)$  في المعلم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ،

نرفق عدد مركب  $x + iy$  ويدعى لاحقة النقطة  $M$ ، أو لاحقة

الشعاع  $\overrightarrow{OM}$ .

## للحفظ

$(O; \vec{i}; \vec{j})$  معلم

متعامد ومتجانس مباشر للمستوي.

$A$  و  $B$  نقطتان من المستوي

لاحقتاهما على الترتيب

$z_1$  و  $z_2$ .

لاحقة الشعاع  $\overrightarrow{AB}$  هي العدد

المركب  $z_2 - z_1$ .

لاحقة منتصف القطعة المستقيمة  $[AB]$  هو العدد المركب  $\frac{z_1 + z_2}{2}$ .

•  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  شعاعان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب  $z_1$  و  $z_2$ .

الشعاعان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مرتبطان خطياً إذا وفقط إذا كان  $z_2 = kz_1$  حيث  $k \in \mathbb{R}$ .

العدد المركب  $z$  حقيقي إذا وفقط إذا كانت صورته  $M$  تقع على محور الفواصل.

العدد المركب  $z$  تخيلي إذا وفقط إذا كانت صورته  $M$  تقع على محور الترتيب.

## ◆ مرافق عدد مركب

## تعريف

$z$  عدد مركب يكتب بالشكل الجبري  $x + iy$  حيث  $x$  و  $y$  عددان حقيقيان.

مرافق العدد المركب  $z$  هو العدد المركب الذي نرمز له  $\bar{z}$  ويكتب بالشكل

$$\bar{z} = x - iy$$

## للحفظ

• في المستوي المركب، صورتا العددين المركبين المترافقين

متناظرتان بالنسبة لمحور الفواصل.

•  $z = \bar{z}$  و  $z' = \bar{z}'$  عددان مركبان.

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \bar{\bar{z}} = z.$$

$$z \neq 0 / \left(\frac{\bar{z}'}{z}\right) = \frac{\bar{z}'}{\bar{z}}$$

$$z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z), \quad z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z).$$

•  $z = \bar{z}$  عدد حقيقي إذا وفقط إذا كان  $z = \bar{z}$ .

•  $z = -\bar{z}$  عدد تخيلي صرف إذا وفقط إذا كان  $z = -\bar{z}$ .

## ◆ طولية و عمدة عدد مركب غير معدوم

## تعريف

$z$  عدد مركب غير معدوم يكتب بالشكل الجبري

$x + iy$  حيث  $x$  و  $y$  عددان حقيقيان.

$M$  صورة للعدد المركب  $z$  في المستوي المركب المزود بالمعلم المتعامد

و المتجانس المباشر  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . الإحداثيات القطبية للنقطة  $M$ .

$r$  يدعى طولية العدد المركب  $z$  ويرمز له  $|z|$ .

$\theta$  يدعى عمدة العدد المركب  $z$  ويرمز له  $\arg(z)$ .

للحفظ

المستوي المركب مزود بالعمود المتعامد والمتجانس المباشر  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

إذا كانت النقطة  $M$  صورة للعدد المركب  $z$  فإن  $OM = |z|$ .

إذا كانت النقطتان  $A$  و  $B$  صورتين للعددين المركبين  $z_A$  و  $z_B$  فإن  $AB = |z_B - z_A| = |\overline{AB}|$ .

• من أجل كل عددين مركبين  $z$  و  $z'$  لدينا:

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|, \quad |zz'| = |z| \times |z'|, \quad |z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$$

$$n \in \mathbb{N} / |z^n| = |z|^n, \quad |z|^2 = z \bar{z}$$

$$z \neq 0 \text{ حيث } \left| \frac{z'}{z} \right| = \frac{|z'|}{|z|}, \quad \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$$

$$z = 0 \text{ يكافئ } |z| = 0$$

$$z = \frac{1}{z} \text{ يكافئ } |z| = 1$$

خواص عمدة عدد مركب غير معدوم

للحفظ

المستوي المركب مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

إذا كانت النقطة  $M$  صورة للعدد المركب غير المعدوم  $z$  فإن  $\arg(z) = (\vec{i}; \overrightarrow{OM})$ .

إذا كانت النقط  $A$ ،  $B$ ،  $C$  التمايزة صور الأعداد المركبة  $z_A$ ،  $z_B$ ،  $z_C$  فإن:

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \quad \text{و} \quad (\vec{i}; \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$$

للحفظ

$$z \in \mathbb{R}^* \text{ يكافئ } \arg(z) = k\pi \quad \left| \quad z \in i\mathbb{R}^* \text{ يكافئ } \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi \right.$$

$$k \in \mathbb{Z} / \arg(z) = \pi + \arg(-z) + 2k\pi \quad \left| \quad \arg(z) = -\arg(\bar{z}) + 2k\pi \right.$$

للحفظ

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z [2\pi], \quad \arg(z z') = \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$$

$$n \in \mathbb{N} / \arg z^n = n \arg z [2\pi], \quad \arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg z' - \arg z [2\pi]$$

♦ الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم

تعريف

$z$  عدد مركب غير معدوم،  $r$  عدد حقيقي موجب تمامًا و  $\theta$

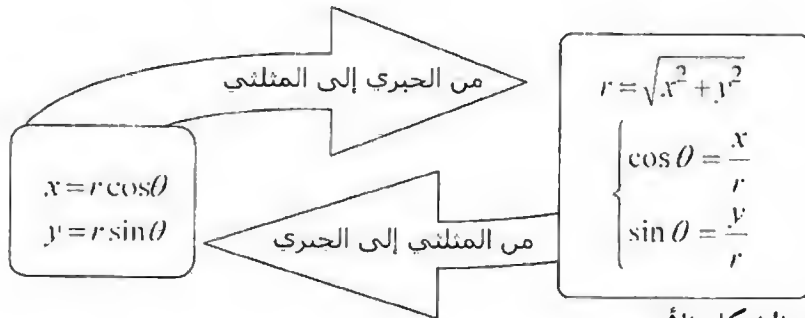
عدد حقيقي كفي.

$r$  طول العدد  $z$  و  $\theta$  عمدة له إذا وفقط إذا كان  $z$  يكتب بالشكل

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

هذه الكتابة للعدد  $z$  تدعى الشكل المثلثي للعدد المركب  $z$ .

الانتقال من الشكل المثلثي إلى الشكل الجبري والعكس



♦ الشكل الأسّي

تعريف

$z$  عدد مركب غير معدوم،  $r$  عدد حقيقي موجب

تمامًا و  $\theta$  عدد حقيقي كفي.

العدد المركب  $z$  كتابة من الشكل  $z = re^{i\theta}$  تدعى الشكل الأسّي للعدد  $z$ .

## ◆ الجذور النونية لعدد مركب

## مبرهنة 2

عدد مركب غير معدوم، طولته  $r$  والعدد الحقيقي  $\theta$  عمدة له.  
العدد  $u$  له  $n$  جذر نوني وهي حلول المعادلة  $z^n = u$  ذات  
المجهول المركب  $z$ . هذه الحلول كلها من الشكل:  
$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\theta + 2k\pi)/n} \quad k \in \{0; 1; 2; \dots; (n-1)\}$$

## للحفظ

في المستوي المركب المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس  
المباشر  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .  $u \in \mathbb{C}^*$  و  $n$  عدد طبيعي.  
صور حلول المعادلة  $z^n = u$  ذات المجهول المركب  $z$  حيث  $(n \geq 3)$ ، هي  
رؤوس مضلع منتظم عدد أضلاعه  $n$  مرسوم داخل الدائرة التي مركزها  $O$   
ونصف قطرها  $\sqrt[n]{|u|}$ .

## ★ الأعداد المركبة والتحويلات النقطية في المستوي

المستوي المركب مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .  
النقطتان  $M$  و  $M'$  صورتي العددين المركبين  $z$  و  $z'$  على الترتيب.  
 $f$  الدالة ذات المتغير المركب  $z$  المرفقة بالتحويل النقطي  $T$  حيث:

$$f(z) = z' \quad \text{يكافئ} \quad T(M) = M'$$

الجدول التالي يلخص التعريف الهندسي والتعريف المركب للتحويل النقطي.

## خواص

$r(\cos \theta + i \sin \theta) = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$  يكافئ  $r = r'$  و  $\theta = \theta' + 2k\pi$  حيث  $k \in \mathbb{Z}$ .

$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'}$  يكافئ  $r = r'$  و  $\theta = \theta' + 2k\pi$  حيث  $k \in \mathbb{Z}$ .

من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{Z}$ ،  $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = (\cos n\theta + i \sin n\theta)$ .

و  $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$  (دستور موافق)

$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$  و  $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$  (دستور أولر)

## ★ المعادلات من الدرجة الثانية

## ◆ الجذران التربيعيان لعدد مركب

عدد مركب غير معدوم و  $\theta$  عمدة له. المعادلة  $z^2 = u$  تقبل في المجموعة  $\mathbb{C}$

حين متعاكسين هما:  $\sqrt{|u|} \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$  و  $-\sqrt{|u|} \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$

ويديعان الجذران التربيعيان للعدد  $u$ .

## مبرهنة 1

المعادلة  $az^2 + bz + c = 0$  حيث  $a, b, c$  أعداد مركبة و  $a \neq 0$

تقبل حلين في المجموعة  $\mathbb{C}$  هما:  $\frac{-b + \delta}{2a}$  و  $\frac{-b - \delta}{2a}$

حيث:  $\delta$  جذر تربيعي للعدد  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

## نتيجة

نعتبر المعادلة  $az^2 + bz + c = 0$  حيث  $a, b, c$  أعداد مركبة و  $a \neq 0$

إذا كان  $z_1$  و  $z_2$  حلّي هذه المعادلة فإنه من أجل كل عدد مركب  $z$ ،

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$$

ولدينا:  $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$  و  $z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$

$$\text{Im}(z_5) = -5 \text{ و } \text{Re}(z_5) = 0 \leftarrow z_5 = \frac{5}{i} = \frac{5(-i)}{-i^2} = -5i$$

### الأشكال المختلفة لعدد مركب

<p>ضع على الشكل المثلثي ثم الأسّي كلا من الأعداد:</p> $z_3 = -1 + i, z_2 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}, z_1 = -3 + i\sqrt{3}$ <p>ضع على الشكل الجبري كلا من العددين:</p> $z_5 = -3\left(\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3}\right), z_4 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$	2
--	---

الحل:  $z_1 = -3 + i\sqrt{3}$  لدينا  $|z_1| = \sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$  نسمي  $\theta_1$  عمدة

$$k \in \mathbb{Z} / \theta_1 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \theta_1 = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{array} \right. \text{العدد } z_1 \text{ تحقق}$$

وبالتالي:  $z_1 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$  و  $z_1 = 2\sqrt{3}\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)$

$z_2 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$  لدينا  $|z_2| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$  نسمي  $\theta_2$  عمدة

$$k \in \mathbb{Z} / \theta_2 = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \theta_2 = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_2 = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \end{array} \right. \text{العدد } z_2 \text{ تحقق}$$

وبالتالي:  $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$  و  $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{-\pi}{6} + i \sin \frac{-\pi}{6}\right)$

$z_3 = -1 + i$  لدينا  $|z_3| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$  نسمي  $\theta_3$  عمدة العدد

التحويل النقطي	التعريف الهندسي	التعريف المركب
الانسحاب شعاعه $\vec{v}$ الذي لاحقه $z_0$	$\overrightarrow{MA'M'} = \vec{v}$	$z' = z + z_0$
التحاكي مركزه $\Omega$ الذي لاحقه $z_\Omega$ ونسبته $k$ حيث $k \in \mathbb{R}^*$	$\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$	$z' - z_\Omega = k(z - z_\Omega)$
دوران مركزه $\Omega$ الذي لاحقه $z_\Omega$ وزاويته $\theta$	$\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega M}$ و $\arg(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$	$z' - z_\Omega = e^{i\theta}(z - z_\Omega)$

### تمارين محلولة

### الكتابة على الشكل الجبري

<p>اكتب كلا من الأعداد التالية على الشكل الجبري، ثم عيّن الجزء الحقيقي والجزء التخيلي.</p> $z_5 = \frac{5}{i}, z_4 = \frac{1-i}{i+2}, z_3 = i^5, z_2 = (2i-3)(2+3i), z_1 = (1+i)^3$	1
---	---

الحل:  $\text{Im}(z_1) = 2, \text{Re}(z_1) = -2 \leftarrow z_1 = (1+i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = -2 + 2i$

$\text{Im}(z_2) = -5, \text{Re}(z_2) = -12 \leftarrow z_2 = (2i-3)(2+3i) = 4i - 6 - 6 - 9i = -12 - 5i$

$\text{Im}(z_3) = 1, \text{Re}(z_3) = 0 \leftarrow z_3 = i^5 = i \times i^2 \times i^2 = i(-1)(-1) = 1$

$\text{Im}(z_4) = -\frac{3}{5}, \text{Re}(z_4) = \frac{1}{5} \leftarrow z_4 = \frac{1-i}{i+2} = \frac{(1-i)(-i+2)}{(i+2)(-i+2)} = \frac{-i+2+i^2-2i}{1+4} = \frac{1-3i}{5}$

$$\Delta = (-2+9i)^2 - 4(-18-6i) = -5 - 12i \text{ . تميزها هو } z^2 + (-2+9i)z - 18-6i = 0$$

نبحث عن الجذرين التربيعيين للعدد  $\Delta$  .

نضع:  $z = x + iy$  أحد الجذرين التربيعيين للعدد  $\Delta$  حيث:  $x$  و  $y$  عددا حقيقيان.

$$z^2 = \Delta \text{ يكافئ } (x+iy)^2 = -5-12i \text{ يكافئ } x^2 - y^2 + 2ixy = -5-12i$$

$$z = -2+3i \text{ أو } z = 2-3i \text{ يكافئ } \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = -12 \end{cases}$$

لاحظ

يمكن إضافة معادلة ثالثة مساعدة لحل الجملة وهي:  $x^2 + y^2 = 13$  تنتج من تساوي الطولين للعددين  $z$  و  $\Delta$  وهي في اتحاد واحد.

$$|z_1| = |z_2| \text{ يستلزم } z_1 = z_2$$

إذا: حلّي المعادلة هما:

$$z' = \frac{(2-9i) - (2-3i)}{2} = -3i$$

$$z'' = \frac{(2-9i) + (2-3i)}{2} = 2-6i$$

وبالتالي  $S = \{z'; z''\}$  .

• نبحث عن العدد الحقيقي  $z_0$  الذي يحقق  $f(z_0) = 0$  .

$$f(z_0) = 0 \text{ يكافئ } z_0^3 + 9iz_0^2 + 2(6i-11)z_0 - 3(4i+12) = 0$$

$$(z_0^3 - 22z_0 - 36) + (9z_0^2 + 12z_0 - 12)i = 0$$

$$\text{يكافئ } \begin{cases} z_0^3 - 22z_0 - 36 = 0 \\ 9z_0^2 + 12z_0 - 12 = 0 \end{cases} \text{ أي } z_0 = -2 \text{ وهو حل حقيقي للمعادلة } f(z) = 0$$

لايجاد الحلول الأخرى للمعادلة  $f(z) = 0$  ، نحلّل العدد  $f'(z)$  إلى جداء عاملين أحدهما من الدرجة الأولى نعرفه والآخر من الدرجة الثانية نبحث عنه، باستعمال جدول هورنر (مثلاً)

معاملات $f'(z)$	1	$9i$	$12i-22$	$-12i-36$
أحل حقيقي '-2'	//////	-2	$-18i+4$	$12i+36$
معاملات هورنر	1	$9i-2$	$-6i-18$	0

يعني أن:  $f(z) = (z+2)(z^2 + (9i-2)z - 6i-18)$  من أجل كل  $z$  من  $C$  .  
 $f(z) = 0$  يكافئ:  $z+2=0$  أو  $z^2 + (9i-2)z - 6i-18 = 0$   $z^2$  حلت سابقاً  
 يكافئ:  $z = -2$  أو  $z = 2-6i$  أو  $z = -3i$   
 وبالتالي:  $S = \{-2; -3i; 2-6i\}$

$$\text{تحقق } \begin{cases} \cos \theta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_3 = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ إذا: } k \in \mathbb{Z} / \theta_3 = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\text{وبالتالي: } z_3 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ و } z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$$

$$z_4 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ يعني أن } |z_4| = 2 \text{ و } \arg z_4 = -\frac{\pi}{3}$$

$$\text{إذا: } z_4 = 1 - i\sqrt{3} \text{ أي } z_4 = 2\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right)$$

$$\arg z_5 = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \text{ و } |z_5| = 3 \text{ يعني أن } z_5 = -3\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\text{إذا: } z_5 = \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ أي } z_5 = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

### حل معادلات في C

• حل في مجموعة الأعداد المركبة  $C$  المعادلات التالية:

$$z^2 + (-2+9i)z - 18-6i = 0, 3z^2 + z + 1 = 0, 3z^2 + z - 1 = 0$$

$$\text{• نعتبر العبارة } f(z) = z^3 + 9iz^2 + 2(6i-11)z - 3(4i+12)$$

ذات المتغير  $z$  من  $C$  .

يبين أن المعادلة  $f(z) = 0$  تقبل حلاً حقيقياً في  $C$  .

حل في  $C$  المعادلة  $f(z) = 0$  .

3

$$\text{الحل: } 3z^2 + z - 1 = 0 \text{ تميزها هو } \Delta = 13 \text{ حليها هما: } z' = \frac{-1-\sqrt{13}}{6} \text{ و } z'' = \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$$

$$S = \{z'; z''\} \text{ إذا: } z'' = \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$$

$$3z^2 + z + 1 = 0 \text{ تميزها هو } \Delta = -11 = (i\sqrt{11})^2 \text{ حليها هما:}$$

$$S = \{z'; z''\} \text{ إذا: } z'' = \frac{-1+i\sqrt{11}}{6} \text{ و } z' = \frac{-1-i\sqrt{11}}{6}$$



## التعرف على مجموعة النقط

في المستوى المركب المزود بالعلم المتعامد والمتجانس المباشر  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

نعتبر النقطة  $M$  إحداثياتها  $(x; y)$  صورة العدد المركب  $z$

عين وأنشئ  $(P_1)$  و  $(P_2)$  مجموعتي النقط  $M$  من المستوى حيث:

$$(P_1): |z+4|=2 \quad (P_2): |z-1-i|=|z+3-2i|$$

**الحل:**  $(P_1): |z+4|=2$  تكافئ  $AM=2$  حيث  $A$  صورة العدد  $-4$ .

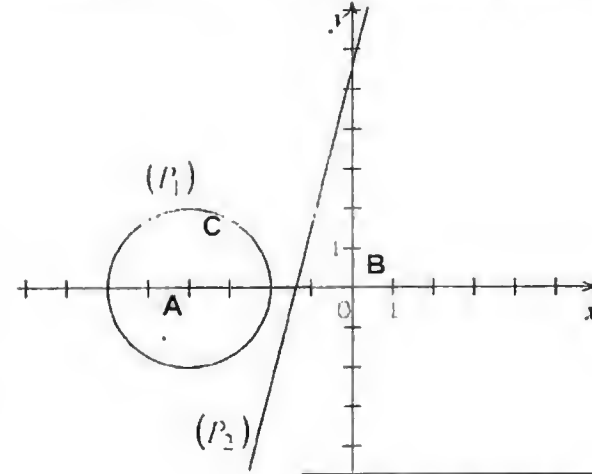
إذا:  $(P_1)$  الدائرة التي مركزها  $A$  ونصف قطرها 2.

حيث  $B$  صورة العدد  $(P_2): |z-1-i|=|z+3-2i|$  تكافئ  $BM=CM$  حيث  $C$  صورة العدد  $(1+i)$

والعدد  $(2i-3)$ .

إذا:  $(P_2)$  هي محور

القطعة المستقيمة  $[BC]$ .



## التحويلات النقطية والأعداد المركبة

$A$  صورة العدد المركب  $-1+\sqrt{3}+i$  في المستوى المركب المزود بالعلم المتعامد والمتجانس المباشر  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

$\alpha$  التناظر المركزي الذي مركزه  $O$ ، الدوران الذي مركزه  $O$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$

$h$ ، التحاكي الذي مركزه  $O$  ونسبته  $\sqrt{3}$ .

أحسب لاحقة كلا من النقط  $B, C, D$ ، عندما  $B = s(A)$ .

$C' = r(A)$ ،  $D = h(C')$  (يتبع)

• نبي أن  $A$  هي صورة  $B$  بالدوران الذي مركزه  $D$  وزاويته  $\frac{\pi}{3}$ .

استنتج طبيعة المثلث  $ABD$ .

5

**الحل:**  $B = s(A)$  يكافئ  $\overline{OB} = -\overline{OA}$  معناه  $z_B = -z_A$  أي  $z_B = 1 - \sqrt{3} - i$ .

$C' = r(A)$  يكافئ  $z_{C'} = e^{i\pi/2} z_A$  معناه  $z_{C'} = i z_A$  أي  $z_{C'} = -1 + i(-1 + \sqrt{3})$ .

$D = h(C')$  يكافئ  $z_D = \sqrt{3} z_{C'}$  أي  $z_D = -\sqrt{3} + i(3 - \sqrt{3})$ .

• يمكن التحقق من العلاقة:  $z_A - z_D = e^{i\pi/3} (z_B - z_D)$ .

لدينا من جهة:  $z_A - z_D = -1 + \sqrt{3} + i - (-\sqrt{3} + i(3 - \sqrt{3})) = (2\sqrt{3} - 1) + i(-2 + \sqrt{3})$

ومن جهة أخرى:  $e^{i\pi/3} (z_B - z_D) = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) (1 + i(\sqrt{3} - 4)) = (2\sqrt{3} - 1) + i(-2 + \sqrt{3})$

وبالتالي:  $z_A - z_D = e^{i\pi/3} (z_B - z_D)$  إذا:  $A$  هي صورة  $B$  بالدوران الذي مركزه  $D$  وزاويته  $\frac{\pi}{3}$ .

• الكتابة الأخيرة تعني أن:  $\left(\overline{DA}; \overline{DB}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  و  $DA = DB$

هذا يعني أن المثلث  $ABD$  متساوي الساقين وزاوية الرأس الأساس  $D$  هي  $60^\circ$ .

وبالتالي المثلث  $ABD$  متقايس الأضلاع.

## تمارين للتدريب

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلات التالية:

$$-z^2 + 2z - 11 = 0, \quad 2z + i\bar{z} + 8i = 0, \quad 2z + i - (3 - i)^2 = 7i + iz - 1$$

$$\alpha \in \mathbb{R} / z^2 - 2z \sin \alpha + 1 = 0, \quad z^3 + z^2 + z + 1 = 0, \quad z^4 + (3 - 4i)z^2 - 12i = 0$$

$$\alpha \in ]0; \pi[ / z^2 \sin^2 \alpha + z \sin 2\alpha + 1 = 0$$

$$2. \text{ نعتبر العددين المركبين } z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \text{ و } z_2 = 2 + 2i\sqrt{3}$$

اكتب على الشكل المثلي الأعداد التالي:  $z_1, z_2, z_1^2, z_2^2, z_1^3, z_2^3$ . استنتج قيمة

$$\cos \frac{7\pi}{12} \text{ و } \sin \frac{7\pi}{12}$$

$$3. f \text{ الدالة المعرفة على المجموعة } C' - \{-i\} \text{ بالدستور: } f(z) = \frac{iz}{z+i}$$

نعتبر النقطة  $M$  ذات اللاحقة  $z$  في المستوى المركب المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر  $(O; \bar{i}; \bar{j})$ .

$$\bullet \text{ عَيِّن إحداثيات النقطة } A \text{ ذات اللاحقة } z_0 \text{ حيث: } f(z_0) = 1 + 2i.$$

$\bullet$  من أجل كل عدد مركب  $z$  من  $C' - \{-i\}$ ، نضع:  $r$  طولية العدد  $(z+i)$  و العدد  $\alpha$  عمدة له.

أعط الشكل المثلي للعدد المركب  $f(z) + i$  بدلالة  $r$  و  $\alpha$ .

$\bullet$  نعتبر النقطة  $I$  ذات اللاحقة  $-i$ .

عَيِّن مجموعة النقط  $M$  من المستوى والتي تحقق:  $|f(z) + i| = \sqrt{2}$ .

عَيِّن مجموعة النقط  $M'$  من المستوى والتي تحقق:  $\arg(f(z) + i) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$ .

$\bullet$  بَيِّن أن النقطة  $A$  تنتمي إلى  $\Omega \cap \Omega'$ ، ثم أنشئ المجموعتين  $\Omega$  و  $\Omega'$ .

4. في المستوى المركب المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر  $(O; \bar{i}; \bar{j})$ ،

نعتبر النقط  $A, B, C$  التي لواحقها على الترتيب  $z_A = -2, z_B = 1 + i$ ،

$$z_C = -1 - 3i$$

$\bullet$  تعرّف على طبيعة المثلث  $ABC$ .

$\bullet$  من أجل كل عدد مركب  $z \neq 1 + i$  نضع:  $Z = \frac{z+1+3i}{z-1-i}$

$\bullet$  فسّر هندسيا طولية وعمدة العدد المركب  $Z$ .

$\bullet$  عَيِّن وأنشئ  $\Lambda$  مجموعة النقط  $M$  صور العدد  $z$  بحيث:  $|Z| = 1$ .

$\bullet$  عَيِّن وأنشئ  $\Psi$  مجموعة النقط  $M$  صور العدد  $z$  بحيث يكون  $Z$  تخيلي صرف.

5. في المستوى المركب المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر  $(O; \bar{i}; \bar{j})$ ، نعتبر النقطة  $A$

ذات اللاحقة  $1$ ، ومن أجل كل عدد حقيقي  $\theta$  من المجال  $[0; 2\pi]$  النقطة  $M$  ذات

$$\text{اللاحقة } z = e^{i\theta}.$$

نضع:  $P$  و  $Q$  النقطتان ذات اللاحقتان  $z+1$  و  $z^2$  على التوالي.

$\bullet$  انطلاقا من النقطة  $M$  أعط إنشاء هندسيا لكل من النقطتين  $P$  و  $Q$ . ضع

النقط  $O, A, M, P$  و  $Q$  في نفس الشكل.

$\bullet$  عَيِّن وأنشئ مجموعة النقط  $P$  من المستوى عندما يتغير  $\theta$  في  $[0; 2\pi]$ .

$\bullet$  نضع:  $S$  لاحقة العدد المركب  $(z^2 + z + 1)$  حيث  $z$  يمثل دائما لاحقة النقطة  $M$ .

$\bullet$  عَيِّن وأنشئ مجموعة النقط  $S$ .

$\bullet$  في حالة  $S \neq O$ ، أنشئ المستقيم  $(OS)$  وضع تخمينا حول النقط  $O, S$  و  $M$ .

$\bullet$  بَيِّن أن العدد  $\frac{z^2 + z + 1}{z}$  حقيقي من أجل كل  $\theta$  من المجال  $[0; 2\pi]$ . استنتج.

6. المستوى المركب مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر  $(O; \bar{i}; \bar{j})$ .

$\bullet$  حل في مجموعة الأعداد المركبة  $C'$  المعادلة:  $z^3 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$ .

$\bullet$  نعتبر النقطتين  $A$  و  $B$  ذات اللاحقتين  $z_A = -4\sqrt{3} - 4i$  و  $z_B = 4\sqrt{3} + 4i$

$\bullet$  أكتب العددين  $z_A$  و  $z_B$  على الشكل الأسّي.

$\bullet$  احسب المسافات  $OA, OB, AB$ ، واستنتج طبيعة المثلث  $OAB$ .

$\bullet$  نعتبر النقطة  $E$  صورة العدد المركب  $i - \sqrt{3}$  و النقطة  $D$  صورها بالدوران الذي مركزه  $O$

وزاويته  $-\frac{\pi}{3}$ . عَيِّن اللاحقة  $d$  للنقطة  $D$ .

$\bullet$  نعتبر النقطة  $G$  مرجح الجملة المثقلة  $\{(O; -1); (D; 1); (B; 1)\}$ .

تحقق من وجود النقطة  $G$ ، ثم عَيِّن لاحقتها  $g$ . بَيِّن أن النقط  $E, D, G$  على استقامة واحدة.

7.  $f$  التحويل النقطي في المستوى الذي يرفق بكل نقطة  $M$  ذات اللاحقة  $z$ ، النقطة  $M'$  ذات

$$\text{اللاحقة } z' = 3z + 3 - i.$$

$\bullet$  بَيِّن أن للتحويل النقطي  $f$  نقطة صامدة واحدة  $\Omega$  يصاب بعين لاحقتها  $\omega$ .

$\bullet$  تحقق أن:  $(z - \omega) = 3(z' - \omega)$  و استنتج طبيعة  $f$ .

8.  $f$  التحويل النقطي في المستوي الذي يرفق بكل نقطة  $M$  ذات اللاحقة  $z$ ، النقطة  $M'$  ذات

$$اللاحقة 'z حيث: z' = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z.$$

بين أن  $f$  دوراناً مركزه  $O$  يطلب تعيين زاويته. عيّن صورة حامل محور الفواصل بالدوران  $f$ .

9.  $s$  التحويل النقطي في المستوي الذي يرفق بكل نقطة  $M$  ذات اللاحقة  $z$ ، النقطة  $M'$

$$ذات اللاحقة 'z حيث: z' = -z + 4.$$

بين أن للتحويل النقطي  $s$  نقطة صامدة واحدة  $A$ ، يطلب تعيين لاحقتها  $A$ .

بين أن  $s$  هو التناظر المركزي والذي مركزه  $A$ .

الدوران الذي مركزه  $O$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$ ، نضع:  $M'' = (r \circ s)(M)$ .

أنشئ النقطة  $M'$  من أجل  $z = 3 + i$ .

بين أن النقطة  $M''$  هي صورة النقطة  $M$  بدوران يطلب تعيين مركزه وزاويته.

10. المستوي المركب المزود بالمعجم المتعمد والمنحاسن المباشر  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

$T$  التحويل النقطي في المستوي الذي يرفق بكل نقطة  $M$  ذات الإحداثيات  $(x; y)$ ، النقطة  $M'$  ذات الإحداثيات  $(x'; y')$

$$حيث: \begin{cases} x' = ax - by + a' \\ y' = bx + ay + b' \end{cases} \quad a, b, a', b' \text{ أعداد حقيقية.}$$

بين أن اللاحقتين  $z$  و  $z'$  للنقطتين  $M$  و  $M'$  على الترتيب تحققان العلاقة  $z' = mz + p$

حيث  $m$  و  $p$  عددان مركبان يطلب تعيينهما بدلالة الأعداد  $a, b, a', b'$ .

عيّن الأعداد  $a, b, a', b'$  حتى يكون التحويل النقطي  $T$  انسحاباً شعاعه  $\vec{j} + 2\vec{i}$ .

عيّن الأعداد  $a, b, a', b'$  حتى يكون التحويل النقطي  $T$  تحاكً نسبته 3 ومركزه  $A(1; 2)$ .

عيّن الأعداد  $a, b, a', b'$  حتى يكون التحويل النقطي  $T$  دوراناً زاويته  $\frac{3\pi}{4}$  ومركزه  $I(0; 2)$ .

## 8- التشابهات المستوية المباشرة

Hard equation

ما يجب أن يعرف:

★ عموميات حول التشابهات المستوية

تعريف

التشابه المستوي هو التحويل النقطي في المستوي الذي يحافظ على تناسب المسافات.

أي: من أجل النقط الأربعة  $A, B, C, D$  وصورها  $A', B', C', D'$

$$و' D' على الترتيب بالتشابه المستوي، لدينا: \frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

أي: التشابه المستوي هو التحويل النقطي في المستوي الذي يضاعف المسافات  $k$  مرة.

العدد الحقيقي المُرَجَّب تماماً  $k$  يدعى نسبة التشابه.

التقاييس (أو تساوي القياس) هو التشابه المستوي نسبته 1.

خواص

• مركب تشابحين المستوي نسبتهما  $k$  و  $k'$  هو تشابه المستوي نسبته  $kk'$ .

• التحويل العكسي للتشابه المستوي الذي نسبته  $k$  هو التشابه المستوي الذي نسبته  $\frac{1}{k}$ .

• التشابه المستوي يحافظ على استقامة النقط.

• التشابه المستوي يحول كل مثلث  $ABC$  إلى مثلث  $A'B'C'$  يشبهه.

• التشابه المستوي يحافظ على الزوايا.

## ★ التشابه المستوي المباشر

## تعريف

التشابه المستوي المباشر هو التشابه المستوي الذي يحافظ على الزوايا الموجهة.

أي: من أجل النقط الأربعة  $A, B, C, D$  حيث  $A \neq B$  و  $C \neq D$  و صورها  $A', B', C', D'$  على الترتيب بالتشابه المستوي المباشر، لدينا:  $l \in \mathbb{Z} \mid (\overline{AB}; \overline{CD}) = (\overline{A'B'}; \overline{C'D'}) + 2l\pi$

الانسحاب، التحاكي، الدوران، هي تشابهات المستوي المباشر.

## خواص

- مركّب تشابحين المستوي المباشر راويتاهما  $l$  و  $l'$  هو تشابه مستوي مباشر زاويته  $l + l'$ .
- التحويل العكسي للتشابه المستوي المباشر الذي زاويته  $l$  هو التشابه المستوي المباشر الذي زاويته  $-\theta$ .
- التشابه المستوي المركّب المباشر يحوّل النقطة ذات اللاحقة  $z$  إلى النقطة ذات اللاحقة  $z' =$  معرف بالعبارة:  $z' = az + b$  حيث  $a \neq 0$  و  $b$  عددان مركبان و  $a \neq 0$ .
- في العبارة  $z' = az + b$  حيث  $a \neq 0$  لدينا:  $\arg(a)$  يدعى زاوية التشابه المستوي المباشر.
- التشابه المستوي المباشر الذي يختلف عن الانسحاب، يقبل نقطة صامدة واحدة تدعى مركزه.

## للحفظ

$S$  تشابه المستوي المباشر نسبه  $k$  وزاويته  $\theta$  ومركزه النقطة الصامدة  $\Omega$ . ( $S$  ليس انسحاب)

- $S$  هو مركّب (تبديلي) للتحاكي الذي مركزه  $\Omega$  ونسبه  $k$  مع الدوران الذي مركزه  $\Omega$  وزاويته  $\theta$ .
- $S$  تشابه المستوي المباشر نسبه  $k$  وزاويته  $\theta$  ومركزه النقطة الصامدة  $\Omega$ .
- ( $S$  ليس انسحاب)، يحوّل النقطة  $M$  (حيث  $M \neq \Omega$ ) إلى النقطة  $M'$  حيث:  $\Omega M' = k\Omega M$  و  $[\overline{\Omega M}; \overline{\Omega M'}] \equiv \theta[2\pi]$  يتبع...

- $S$  تشابه المستوي المباشر نسبه  $k$  وزاويته  $\theta$  ومركزه النقطة الصامدة  $\Omega$ . ( $S$  ليس انسحاب)، يحوّل النقطة  $M$  ذات اللاحقة  $z$  (حيث  $M \neq \Omega$ ) إلى النقطة  $M'$  ذات اللاحقة  $z'$  يعطى بالعبارة:  $(z' - \omega) = ke^{i\theta}(z - \omega)$  و  $\omega$  لاحقة  $\Omega$ .
- التشابه المستوي المباشر يحافظ على تشابه مباشر للمثلثات، ويحافظ على مرجح الحمل المثلثية.
- التشابه المستوي المباشر يحوّل المستقيم على مستقيم، والقطعة المستقيمة إلى قطعة مستقيمة، والدائرة إلى دائرة.
- التشابه المستوي الذي يترك ثلاث نقط صامدة ليست على استقامة واحدة هو التحويل المطابق.
- التشابه المستوي الذي يترك نقطتان صامدتان  $A$  و  $B$  متميزتان هو التحويل المطابق أو التناظر الخوري بالنسبة للمستقيم  $(AB)$ .
- من أجل كل أربع نقط  $A, B, C, D$  حيث  $A \neq B$  و  $C \neq D$ ، يوجد تشابه المستوي المباشر  $f$  وحيد حيث:  $f(A) = C$  و  $f(B) = D$ .

## ★ الإزاحة

## تعريف

الإزاحة هو الانسحاب أو الدوران

الإزاحة هو تشابه المستوي المباشر نسبه  $1$ . أي: الإزاحة هو تقايس يحافظ على الزوايا الموجهة.

## للحفظ

نعبر  $S$  التشابه المستوي. لدينا حالتين:

- ① إما  $S$  التشابه المستوي المباشر.
- ② إما  $S$  هو مركّب تشابه المستوي المباشر مع تناظر محوري بالنسبة لـ  $\Delta$  (يختار كيفاً). في هذه الحالة الثانية  $S$  يحوّل كل زاوية إلى زاوية معاكسة. ويدعى  $S$  التشابه المستوي غير المباشر محوره  $\Delta$ .

## تمارين محلولة

## التعرّف على التشابه المستوي

1  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  معلم للمستوي متعامد ومتجانس مباشر.

$f$  الدالة في المستوي ترفق بكل نقطة ذات الإحداثيات  $z$  بالنقطة ذات

الإحداثيات  $z'$  حيث:  $z' = (1-i)z + 2-i$ .

بين أن الدالة  $f$  هي التشابه المستوي المباشر طلت تعيين عناصره المميزة.

**الحل:** العبارة  $z' = (1-i)z + 2-i$  هي من الشكل:  $z' = az + b$  حيث:

$a = 1-i$  و  $b = 2-i$  إذا:  $f$  هو التشابه المستوي المباشر.

لدينا:  $|a| = |1-i| = \sqrt{2}$  و  $\arg a = \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4} + 2/\pi$  و  $i \in \mathbb{Z}$

أي: نسبة التشابه  $f$  هي  $\sqrt{2}$  و زاويته  $-\frac{\pi}{4}$

مركز التشابه المستوي المباشر  $f$  هي النقطة الصامدة  $\Omega$  ذات الإحداثيات  $z_0$

تحقق:  $z_0 = (1-i)z_0 + 2-i$  أي:  $z_0 = -1-2i$ .

## مركّب دوران وتحاك

2  $A, B, C, D$  أربع نقط من المستوي  $\mathbb{C}$ ، لواحقتها على الترتيب

$0, 1, i, 1+i$  و  $i$ . نعتبر النقطة  $K$  منتصف القطعة المستقيمة  $[AC]$ .

$h$  التحاكي الذي مركزه  $D$  ونسبته  $\frac{1}{2}$  و  $r$  الدوران الذي مركزه  $K$

وزاويته  $\frac{\pi}{2}$ .

• أعط العبارة المركبة لكل من  $h$  و  $r$ .

• استنتج طبيعة التحويل النقطي  $h \circ r$  وعناصره المميزة.

**الحل:** العبارة المركبة للتحاكي  $h$  مركزه  $D$  لواحقتها  $i$  ونسبته  $\frac{1}{2}$  هي من

الشكل:  $z' - i = \frac{1}{2}(z - i)$  أي:  $z' = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}i$ .

العبارة المركبة للدوران  $r$  مركزه  $K$  لواحقتها  $\frac{1}{2}i$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$  هي من

الشكل:  $z' - \frac{1+i}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}} \left( z - \frac{1+i}{2} \right)$  أي:  $z' = iz + 1$ .

استخراج العبارة المركبة للتحويل النقطي  $h \circ r$ .

لدينا المخطط



$h(z_1) = z'$  يكافئ  $z' = \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}i$

أي:  $z' = \frac{1}{2}(iz + 1) + \frac{1}{2}i = \frac{i}{2}z + \frac{1+i}{2}$  يكافئ  $h[r(z)] = z'$

هي عبارة مركبة من الشكل:  $z' = az + b$  حيث:  $a = \frac{i}{2}$  و  $b = \frac{1+i}{2}$

إذا:  $h \circ r$  تشابه المستوي المباشر نسبته  $\frac{1}{2}$  و  $|a| = \left| \frac{i}{2} \right| = \frac{1}{2}$  وزاويته  $\arg a = \frac{\pi}{2}$

ومركزه النقطة الصامدة  $\Omega$  ذات الإحداثيات  $z_0$  تحقق  $z_0 = \frac{i}{2}z_0 + \frac{1+i}{2}$  أي:  $z_0 = \frac{1+3i}{5}$

## التعرّف على المحل الهندسي

3

نعتبر في المستوي الموجه مثلث  $ABC$  نقائمه في  $B$  والمتساوي الساقين.  $h$

نقطة كيفية من المستقيم  $(BC)$  و  $h'$  النقطة من المستوي بحيث يكون

مثلث  $h'AB$  قائم في  $A$  ومتساوي ساقين.

• أعط النسبة  $k$  والزاوية  $\theta$  التشابه المستوي المباشر  $h$  الذي مركزه  $A$ .

وتحوّل النقطة  $h'$  إلى النقطة  $h''$ .

• عيّن مجموعة النقط  $h'$  من المستوي عندما تتغير النقطة  $h$  على

المستقيم  $(BC)$ .

**الحل:** التشابه المستوي المباشر  $S$  مركزه  $I$  ويحول النقطة  $1/$  إلى النقطة  $1'/$  معناه:

$$AM' = kAM \quad \text{و} \quad (\overline{AM}, \overline{AM'}) = 0[2\pi]$$

$$\text{إذا: } k = \frac{AM'}{AM} = \sqrt{2} \quad (\text{حسب علاقة Pythagore}) \quad \text{و} \quad \theta = \frac{\pi}{4} + 2l\pi \quad l \in \mathbb{Z}$$

$$\text{كون } \hat{A} = \hat{M}' = \frac{\pi}{4} \text{ في المثلث } (AMM')$$

عندما تتغير النقطة  $M$  على المستقيم  $(BC)$  فإن صورتها  $M'$  بالتشابه  $S$  تتغير على المستقيم  $s(BC)$ .

بما أن  $B$  نقطة من  $(BC)$  فإن صورتها

$$s(B) = C$$

ومن أجل كل نقطة  $M$  من المستقيم  $(BC)$

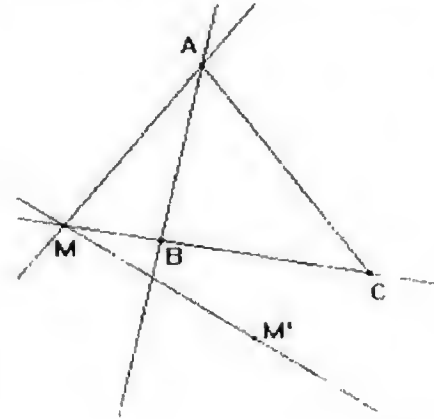
تختلف عن  $B$ ، صورتها  $M'$  تحقق:

$$(\overline{BM}, \overline{CM'}) = \frac{\pi}{4}$$

إذا: الحل الهندسي للنقطة  $1'/$  هو المستقيم الذي

يشمل  $C'$  ويصنع مع المستقيم  $(BA)$

زاوية قياسها  $\frac{\pi}{4}$



### التشابه المستوي غير المباشر

$(O; \vec{r}; \vec{r}')$  معمم للمستوي متعامد ومتجانس مباشر.  $f$  التحويل النقطي في

المستوي الذي يحول النقطة  $1/$  ذات الإحداثيات  $(x, y)$  إلى النقطة  $1'/$

ذات الإحداثيات  $(x', y')$  حيث:  $x' = 2y + 2$  و  $y' = 2x - 1$

• بين أن  $f$  يقبل نقطة صامدة واحدة  $\Omega$  يطلب تعيين إحداثياتها.

• بين أن  $f$  تشابه المستوي نسبته 2.

•  $h$  هو التحاكي الذي مركزه  $\Omega$  ونسبته 2 ويحول النقطة  $1/$  إلى

النقطة  $M_1$ .

بين أن منتصف القطعة المستقيمة  $[M'M_1]$  يتم من مستقيم  $\Delta$  الذي يشمل

النقطة  $\Omega$ ، يطلب تعيين معادلة للمستقيم  $\Delta$ . ماذا تستنتج إذاً عن التشابه  $f$ ؟

4

**الحل:**  $\Omega(x, y)$  صامدة في التحويل  $f$  معناه  $f(\Omega) = \Omega$  أي:  $x = 2y + 2$  و  $y = 2x - 1$

أي:  $x = 0$  و  $y = -1$  بما أن الجملة التحليلية قبلت حلاً واحداً فإن

$\Omega(0; -1)$  وحيدة.

نعتبر  $M(x, y)$  و  $N(a; b)$  نقطتان من المستوي و  $M'$  و  $N'$  صورتيهما على

الترتيب بالتحويل النقطي  $f$ .

$$\text{لدينا إذا: } MN^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2 \quad \text{و}$$

$$M'N'^2 = (a' - x')^2 + (b' - y')^2$$

$$= 4[(a - x)^2 + (b - y)^2] = 4MN^2$$

أي:  $M'N' = 2MN$  هذا يعني أن  $f$  التشابه المستوي نسبته 2.

$h$  هو التحاكي الذي مركزه  $\Omega$  ونسبته 2 ويحول النقطة  $1/$  إلى النقطة  $M_1$  معناه

$$\Omega M_1 = 2\Omega M$$

بوضع:  $M_1(x_1, y_1)$  نحصل على العبارة التحليلية للتحاكي  $h$ :  $x_1 = 2x$  و  $y_1 = 2y + 1$

إذاً: إحداثيات النقطة  $I$  منتصف القطعة  $[M'M_1]$  هي:  $(x_I, y_I)$

$$\text{حيث: } x_I = x + y + 1 \quad \text{و} \quad y_I = x + y$$

ينتج أن:  $x_I = y_I + 1$  وهي العلاقة بين إحداثيات منتصف القطعة  $[M'M_1]$ .

وبالتالي مجموعة منتصفات القطع  $[M'M_1]$  هي المستقيم  $\Delta$  ذي المعادلة:  $y = x - 1$ . واضح أن

إحداثيات  $\Omega$  تحقق معادلة  $\Delta$ .

$$\text{نلاحظ أن } \overline{M'M_1} = (2x - 2y - 2) \vec{n} = (2x - 2y - 2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{حيث: } \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ هو شعاع}$$

ناظم للمستقيم  $\Delta$ .

أي  $\overline{M'M_1}$  يعامد  $\Delta$  وبما أن منتصف القطعة  $[M'M_1]$  يقع على  $\Delta$ ، فإن  $M'$  و  $M_1$

متناظرتان بالنسبة للمستقيم  $\Delta$ .

إذاً:  $f$  هو التشابه المستوي غير المباشر، مركزه  $\Omega$  ونسبته 2 ومحوره  $\Delta$ .

### التشابه المستوي غير المباشر ذو بعتين صامدتين على الأقل

$(O; \vec{a}; \vec{b})$  معن للمستوي المركب متعامد ومتجانس مباشر.

$f$  التحويل النقطي في المستوي الذي يحول النقطة  $M$  ذات

5  $z = -1 + 3i$  إلى النقطة  $M'$  ذات اللاحقة  $z' = \frac{4+3i}{5} = -1 + 3i$  حيث:

• عيّن مجموعة النقط الصامدة في التحويل  $f$ .

• عيّن طبيعة التحويل  $f$  وأذكر عناصره المميزة.

الحل: النقطة  $M$  ذات اللاحقة  $z = -1 + 3i$  صامدة في التحويل  $f$  معن  $f(M) = M$

أي:  $z = \frac{4+3i}{5} = -1 + 3i$

يكافئ  $x + iy = \frac{4+3i}{5} = -1 + 3i$  يكافئ  $x + iy = -1 + 3i$  يكافئ  $(x - 3y + 5) + i(-3x + 9y - 15) = 0$

يكافئ  $\begin{cases} x - 3y + 5 = 0 \\ -3x + 9y - 15 = 0 \end{cases}$  يكافئ  $x - 3y + 5 = 0$

يعني أن مجموعة النقط الصامدة في التحويل  $f$  هي المستقيم  $\Delta$  الذي معادلته

$x - 3y + 5 = 0$

العبارة  $z' = a\bar{z} + b$  هي من الشكل:  $z' = \frac{4+3i}{5} = -1 + 3i$

حيث:  $a = \frac{4+3i}{5}$  و  $b = -1 + 3i$

إذاً:  $f$  هو التشابه المستوي غير المباشر. وبما أن  $f$  يترك أكثر من نقطة صامدة

واحدة وكلها على استقامة واحدة. يعني أن:  $f$  هو تناظر المحوري بالنسبة

للمستقيم  $\Delta$ .

### تمارين للتدريب

1.  $ABC'$  مثلث قائم في  $A$  ومتساوي الساقين،  $I$  منتصف القطعة  $[BC']$ .

• أعط العناصر المميزة لكل من التشابه المستوي المباشر  $s$  الذي مركزه  $B$  ويحول  $I$

إلى  $A$  و التشابه المستوي المباشر  $s'$  الذي مركزه  $B$  ويحول  $A$  إلى  $C'$ .

• عيّن طبيعة التحويل النقطي  $s \circ s'$  وأذكر عناصره المميزة.

2.  $(O; \vec{a}; \vec{b})$  معن للمستوي المركب متعامد ومتجانس مباشر. نعتبر النقطتين  $A$  و  $B$  ذات

اللاحقتين  $\sqrt{2}$  و  $i$  على الترتيب.  $(C)$  المقطة من المستوي بحيث يكون الرباعي

$OAC'B$  مستطيل.

نضع:  $I$  منتصف القطعة  $[OA]$  و  $J$  منتصف القطعة  $[BC']$ .

•  $f$  التحويل النقطي في المستوي الذي يحول النقطة  $M$  ذات اللاحقة  $z$  إلى النقطة

$M'$  ذات اللاحقة  $z' = \frac{-i\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + i$  حيث:

• بين أن  $f$  هو التشابه المستوي المباشر ثم عيّن مركزه  $\Omega$  ونسبته  $k$  وزاويته  $\theta$ .

• عيّن صور النقط  $A, B, C$  و  $I$  بالتشابه  $f$ .

• بين أن النقط  $\Omega, A, B$  على استقامة واحدة، وأن النقط  $\Omega, I, C$  على استقامة واحدة.

• استنتج إنشاء للنقطة  $\Omega$ .

• بين أن  $\Omega$  نقطة من الدائرة التي قعرها  $[BC']$  ومن الدائرة التي قعرها  $[IA]$ .

3.  $f$  التحويل النقطي في المستوي المركب. يحول النقطة  $M$  ذات اللاحقة  $z$  إلى

النقطة  $M'$  ذات اللاحقة  $z' = -1 + 3i$  حيث:  $z' = a\bar{z} + b$  حيث  $a$  عدد مركب معيّن.

• عيّن مجموعة قيم  $a$  التي من أجلها يكون التحويل  $f$  سحاحاً. حدّد  $f$  من أجل كل قيمة

للعدد  $a$  انحصار عليها.

• عيّن مجموعة قيم  $a$  التي من أجلها يكون التحويل  $f$  تناظر محوري. حدّد  $f$  من أجل كل قيمة

للعدد  $a$  المحصل عليها.



• عيّن مجموعة قيم  $a$  التي من أجلها يكون التحويل  $f$  تحاكٍ نسبته 2. - حدّد  $f$  من أجل كل قيمة للعدد  $a$  المحصل عليها.

• عيّن مجموعة قيم  $a$  التي من أجلها يكون التحويل  $f$  دوراناً زاويته  $\frac{\pi}{2}$ . - حدّد  $f$  من أجل كل قيمة للعدد  $a$  المحصل عليها.

• حدّد  $f$  من أجل  $a = 1 - i$ .

4.  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  معلم للمستوي المركّب متعامد ومتجانس مباشر. نعتبر النقطتين  $A(3; -1)$  و  $B(0; 2)$

$h$  التحاكي الذي مركزه  $A$  ونسبته  $\sqrt{2}$ ،  $r$  الدوران الذي مركزه  $B$  وزاويته  $\frac{3\pi}{4}$ ، و  $l$  الانسحاب الذي شعاعه  $\overrightarrow{BO}$ .

• أنشئ النقطة  $D$  من المستوي والتي صورتها بالتحويل  $h \circ r \circ l$  هي النقطة  $( )$ .

• بيّن أن التحويل النقطي  $h \circ r \circ l$  هو التشابه المستوي المباشر  $s$ ، وعيّن عناصره المميزة.

• ملاحظة أن المثلث  $OD\Omega$  قائم ومتساوي الساقين، أنشئ النقطة  $\Omega$  مركز التشابه  $s$ .

5. نعتبر المربعين المباشرين  $ABCD$  و  $A'B'C'D'$

• بيّن أن يوجد التشابه المستوي المباشر  $s$  الذي يحوّل النقط  $A, B, C$  و  $D$  إلى النقط  $A', B', C', D'$  بهذا الترتيب.

• نفرض أن المستقيمين  $(AB)$  و  $(A'B')$  متوازيين، ماذا يمكننا القول عن التشابه  $s$ ؟ في حالة وجود مركز للتشابه  $s$ ، عيّن وضعيته.

• نفرض أن المستقيمين  $(AB)$  و  $(A'B')$  غير متوازيين، ونعتبر  $P$  نقطة تقاطع المستقيمين  $(AB)$  و  $(A'B')$  و  $Q$  نقطة تقاطع المستقيمين  $(CD)$  و  $(C'D')$ .

• بيّن أن المستقيم  $(PQ)$  يشمل المركز  $\Omega$  للتشابه  $s$ . ثم استنتج إنشاءً للنقطة  $\Omega$ .

6.  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  معلم للمستوي المركّب متعامد ومتجانس مباشر. نعتبر الرباعي المحدث المباشر

$ABCD$ . ننشئ خارج هذا الرباعي النقط  $M_1, M_2, M_3$  و  $M_4$  بحيث تكون

المثلثات الأربعة  $AM_1B, BM_2C, CM_3D$  و  $DM_4A$  قائمة عند النقط  $M_1, M_2, M_3$  و  $M_4$  على الترتيب ومتساوية الساقين.

• نضع:  $a, b, c, d$  لواحق النقط  $A, B, C, D$  على الترتيب و  $z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -1, z_4 = -i$  لواحق النقط  $M_1, M_2, M_3, M_4$  على الترتيب.

• باعتبار التشابه الذي مركزه  $A$  و يحوّل النقطة  $B$  إلى النقطة  $M_1$ ,

$$\text{بيّن أن } z_1 = \frac{a + b + i(a - b)}{2}$$

• عبّر عن  $z_2, z_3$  و  $z_4$  بدلالة الأعداد  $a, b, c, d$ .

• بيّن أن حاملًا القطعتين  $[M_1M_3]$  و  $[M_2M_4]$  متعامدين وأن  $M_1M_3 = M_2M_4$ .

7.  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  معلم للمستوي المركّب متعامد ومتجانس مباشر.  $f$  التحويل النقطي في

المستوي الذي يحوّل النقطة  $M$  ذات اللاحقة  $z$  إلى النقطة  $M'$  ذات اللاحقة  $z'$

$$\text{حيث: } z' = \frac{3 + i\sqrt{3}}{4} z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

• عيّن صورة النقطة  $A$  ذات اللاحقة 2 بالتحويل  $f$ ، ولاحقة النقطة  $B$  حيث:  $f(B) = O$ .

• تعرّف على طبيعة التحويل  $f$  واذكر عناصره المميزة.

• في حالة  $M \neq A$  بيّن أن المثلث  $AMM'$  قائم في النقطة  $M'$ .

8.  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  معلم للمستوي المركّب متعامد ومتجانس مباشر.

• عيّن  $(E)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي والتي لاحتقتها  $z$  تحقق:

$$|(1 - i\sqrt{3})z - i - \sqrt{3}| = 4$$

• أعط العبارة المركبة للتشابه المستوي المباشر  $s$  الذي يحوّل النقطة  $A$  ذات اللاحقة  $i$  إلى

النقطة  $O$  و يحوّل النقطة  $B$  ذات اللاحقة  $\sqrt{3}$  إلى النقطة  $B'$  ذات اللاحقة  $4i$ .

معيناً مركز ونسبة وزاوية التشابه  $s$ .

• باستعمال نتائج السؤال السابق، أو - د الخيعة (1) المعرّفة في التمرين.

9.  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  معلم للمستوي المركّب متعامد ومتجانس مباشر.

$s$  التشابه المستوي المباشر، مركزه  $O$  ونسبته  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  وزاويته  $\frac{\pi}{6}$ .

من أجل  $n$  عدد طبيعي، نعتبر مجموعة النقط  $M_n$  المعرّفة بـ:  $M_{n+1} = s(M_n)$

## 9- الهندسة الفضائية

Hard equation

ما يجب أن يعرف:

★ الجداء السلمي في الفضاء

تعريف

$\vec{u}$  و  $\vec{v}$  شعاعان من الفضاء.

$A, B, C$  ثلاث نقط من الفضاء نختار:  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  و  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

يوجد على الأقل مستوى  $P$  يشمل نقط  $A, B, C$ .

الجداء السلمي للشعاعين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  في الفضاء هو الجداء السلمي للشعاعين

$\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$  في المستوي  $P$ . وهو العدد الحقيقي  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  المعروف بـ:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$  حيث:  $\vec{u} \neq \vec{0}$  و  $\vec{v} \neq \vec{0}$

و  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  من أجل  $\vec{u} = \vec{0}$  أو  $\vec{v} = \vec{0}$

★ التعامد في الفضاء

للحفظ

•  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  شعاعان من الفضاء متعامدان معناه  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

• المستقيمان  $(D)$  و  $(D')$  من الفضاء متعامدان معناه شعاعي توجيههما

$\vec{d}(D)$  و  $\vec{d}(D')$  متعامدان.

• الشعاع  $\vec{n}$  ناظم على المستقيم  $(D)$  معناه  $\vec{n}$  يعامد شعاع التوجيه

$\vec{d}(D)$  للمستقيم  $(D)$ .

• الشعاع  $\vec{n}$  ناظم على المستوي  $(P)$  في الفضاء معناه  $\vec{n}$  يعامد شعاعان

غير مرتبطين خطياً من  $(P)$ .

ينبع...

و  $M_0$  النقطة ذات اللاحقة 1.

نرمز بـ:  $\vec{z}_n$  للاحقة النقطة  $M_n$ .

• أعط العبارة المركبة للتشابه المستوي المباشر  $\sigma$ .

• بين أن المتتالية  $(\vec{z}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  هندسية، واكتب عبارة  $\vec{z}_n =$  بدلالة  $n$ .

• احسب  $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3$  و  $\vec{z}_n$ .

• احسب  $(OM_n)$  بدلالة  $n$ .

• بين أن  $\frac{\vec{z}_{n+1} - \vec{z}_n}{\vec{z}_{n+1}} = \frac{i}{\sqrt{3}}$  واستنتج أن:  $(OM_n M_{n+1}) \perp (OM_{n+1})$

وأن  $M_n M_{n+1} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n$

• نضع:  $K_n = M_0 M_1 + M_1 M_2 + \dots + M_n M_{n+1}$ . عبّر عن  $K_n$  بدلالة  $n$ .

• احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n$ .

10.  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  معلم للمستوي المركب متعامد ومتجانس مباشر.

$(D)$  المستقيم الذي يشمل المبدأ  $O$  و  $\vec{n}$  شعاع توجيه له.

نرمز بـ:  $\alpha$  لقياس الزاوية  $(\vec{i}; \vec{n})$ .

• تحقق أن النقطة  $A$  ذات اللاحقة  $e^{i\alpha}$  تنتمي إلى المستقيم  $(D)$ .

• استنتج أن العبارة المركبة للتناظر المحوري  $S_{(D)}$  بالنسبة للمستقيم  $(D)$  هي:

$\vec{z}' = e^{2i\alpha} \vec{z}$ .

• ضع الشكل النهائي للعبارة المركبة للتحويل  $S_{(D)}$  في كل من الحالتين:

$(D): x - y\sqrt{3} = 0, (D): y = -x$

## تمارين محلولة

## التعامد في الفضاء

$A, B, C, D$  أربع نقط من الفضاء.

• برهن صحة التكافؤ التالي:

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 \text{ إذا وفقط إذا كان المستقيمان } (AB) \text{ و } (CD) \text{ متعامدان.}$$

1

•  $ABCD$  رباعي الوجود حيث  $(AB)$  و  $(CD)$  متعامدان و  $(AD)$  و  $(BC)$  متعامدان.

بين أن المستقيمان  $(AC)$  و  $(BD)$  متعامدان.

الحل:  $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$  يكافئ  $(AC^2 - AD^2) + (BD^2 - BC^2) = 0$

يكافئ  $(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 0$

يكافئ  $\overrightarrow{DC} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{CD} \cdot (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 0$

يكافئ  $\overrightarrow{DC} \cdot (2\overrightarrow{AB}) = 0$  أي  $\overrightarrow{DC} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}) = 0$

يعني أن الشعاعان  $\overrightarrow{DC}$  و  $\overrightarrow{AB}$

وبالتالي في حالة  $A \neq B$  و  $C \neq D$  يكون لدينا: المستقيمان  $(AB)$  و  $(CD)$  متعامدان.

لدينا المستقيمان  $(AB)$  و  $(CD)$  متعامدان، ينتج حسب ما سبق أن:

$$(1) \dots AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$$

ومن تعامد  $(AD)$  و  $(BC)$  ينتج كذلك بإتباع نفس العلاقة السابقة

$$(2) \dots AC^2 + BD^2 = AB^2 + DC^2$$

من (1) و (2) ينتج أن  $AD^2 + BC^2 = AB^2 + DC^2$  هذا يعني كذلك بإتباع نفس العلاقة

السابقة أن: المستقيمان  $(AC)$  و  $(BD)$  متعامدان.

• المستقيم  $(D)$  يعامد المستوي  $(P)$  معناه شعاع توجيهه المستقيم  $(D)$  هو شعاع ناظم على المستوي  $(P)$ .

• المستويان  $(P)$  و  $(P')$  في الفضاء متعامدان معناه شعاعيهما الناظم  $\vec{n}(P)$  و  $\vec{n}(P')$  متعامدان.

## \* المعادلة الديكارتية للمستوي

**تعريف**  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.  $(P)$  مستوي من الفضاء

يشمل النقطة  $A$  و  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  شعاع ناظم له.

من أجل كل نقطة  $M(x; y; z)$  من الفضاء:

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \text{ معناه } M(x; y; z) \in (P)$$

من التكافؤ الأخير تنتج معادلة للمستوي  $(P)$  من الشكل:

$$ax + by + cz + d = 0 \text{ حيث } d \in \mathbb{R}$$

## للحفظ

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

• المسافة بين النقطتين  $A(x_0; y_0; z_0)$  و  $B(x_1; y_1; z_1)$  هي:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$$

• المسافة بين النقطة  $A(x_0; y_0; z_0)$  والمستوي  $(P)$  الذي معادلته

$$ax + by + cz + d = 0 \text{ هي: } \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

إذن الشعاعان  $\overline{AB}$ ،  $\overline{BC}$  غير مرتبطين خطياً، ( هذا النمط للبرهان يدعى البرهان بالخلف).

نعلم أن للمستوي  $(ABC)$  معادلة ديكارتية من الشكل:  $ax + by + cz + d = 0$   
يكفي إذاً البحث عن الأعداد  $a, b, c, d$ .

$$\begin{cases} a = -\frac{10}{29}d \\ b = -\frac{11}{29}d \\ c = -\frac{3}{29}d \end{cases} \quad \text{تكافئ} \quad \begin{cases} a + 2b - c + d = 0 \\ 2a + 3c + d = 0 \\ -a + 3b + 2c + d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A \in (ABC) \\ B \in (ABC) \\ C \in (ABC) \end{cases}$$

لدينا: معناه

نعطي أية قيمة للعدد  $d$ . مثلاً  $d = 29$

فنحصل على معادلة المستوي:  $(ABC): -10x - 11y - 3z + 29 = 0$ .

### حساب مقدار

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.  $B(2;1;-1)$ ،  $A(3;0;-1)$

$C(4;2;5)$  و  $D(3;4;3)$  أربع نقط من هذا الفضاء.

• تأكد أن المثلث  $ABC$  متساوي الساقين ثم احسب مساحته.

• تأكد أن للمستوي  $(ABC)$  معادلة ديكارتية من الشكل:

$$2x + 2y - z - 7 = 0$$

• احسب المسافة بين النقطة  $D$  والمستوي  $(ABC)$ ، ثم حجم رباعي

الوجوه  $ABCD$ .

الحل: لدينا:  $\overline{AB}(-1;1;0)$ ،  $\overline{AC}(1;2;6)$ ،  $\overline{BC}(2;1;6)$

$$BC = \sqrt{4+1+36} = \sqrt{41} \text{ و } AC = \sqrt{1+4+36} = \sqrt{41} \text{ ، } AB = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$$

يعني أن المثلث  $ABC$  متساوي الساقين ورأسه الأساس هو  $C$ .

مساحة المثلث  $ABC$  هي  $S_{ABC}$ ، حيث:  $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times CI$  و  $I$  منتصف القطعة  $[AB]$

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= AI \times CI \\ \text{لدينا: } I\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; -1\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{9}{\sqrt{2}} = \frac{9}{2} (u.a) \\ \text{أي: } CI &= \frac{9}{\sqrt{2}} \text{ و } AI = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

### معادلات ديكارتية للمستقيم والمستوي في الفضاء

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.  $A(1;2;-1)$ ،  $B(2;0;3)$

و  $C(-1;3;2)$  ثلاث نقاط من هذا الفضاء.

أعط تمثيل وسيطي ثم ديكارتي للمستقيم  $(AB)$ .

تحقق من وجود المستوي  $(ABC)$  ثم أعط معادلة ديكارتية له.

الحل: لدينا  $\overline{AB}(1;-2;4)$  شعاع توجيه للمستقيم  $(AB)$

$M(x;y;z) \in (AB)$  يكافئ  $\overline{AM} = k \overline{AB}$

$$k \in \mathbb{R} / \begin{cases} x-1 \\ y-2 \\ z+1 \end{cases} = k \begin{cases} 1 \\ -2 \\ 4 \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

$$\text{أي: } k \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = k+1 \\ y = -2k+2 \\ z = 4k-1 \end{cases} \text{ ويستنتج التمثيل الديكارتي بجملة}$$

معادلتين مستقلتين عن  $k$ .

$$\begin{cases} x = k+1 \\ y = -2k+2 \\ z = 4k-1 \end{cases} \quad \text{تكافئ} \quad \begin{cases} k = x-1 \\ y = -2(x-1)+2 \\ z = 4(x-1)-1 \end{cases}$$

$$\text{تكافئ} \quad \begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ 4x - z - 5 = 0 \end{cases} \text{ تدعى تمثيل ديكارتي للمستقيم } (AB)$$

للمستوي  $(ABC)$  موجود إذا وفقط إذا كانت انقص  $A, B, C$  ليست على استقامة واحد.

أي: المستوي  $(ABC)$  موجود إذا وفقط إذا كان الشعاعان  $\overline{AB}$ ،  $\overline{BC}$  غير مرتبطين خطياً.

فترض أن  $\overline{AB}$ ،  $\overline{BC}$  مرتبطين خطياً أي يوجد عدد حقيقي  $k$  بحيث:  $\overline{AB} = k \overline{BC}$

$$\text{يعني أن: } \begin{cases} k = -\frac{1}{3} \\ k = -\frac{2}{3} \\ k = -4 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} -3k = 1 \\ 3k = -2 \\ -k = 4 \end{cases} \quad \text{معناه} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

وهذا تناقض

•  $M(x; y; z)$  نقطة من المستقيم  $(AB)$  معناه  $M(k+1; k+2; -2k)$ .

وبالتالي:  $MC'^2 = (k+1)^2 + (k+2-2)^2 + (-2k-4)^2$  أي

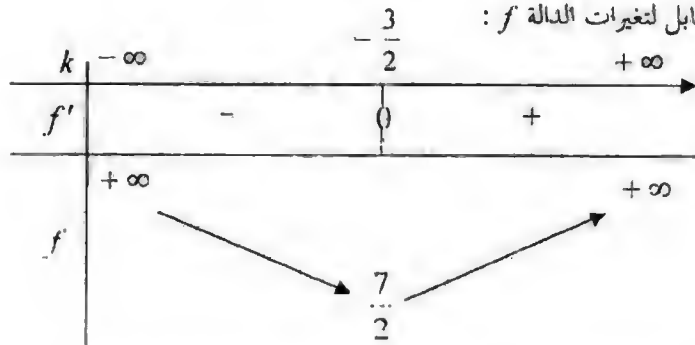
$$MC'^2 = 6k^2 + 18k + 17$$

أصغر قيمة ممكنة للمسافة  $MC'$ ، هي القيمة الحدّية الصغرى للدالة

$$f: k \mapsto 6k^2 + 18k + 17$$

بعد دراسة مختصرة لتغيرات الدالة كثير الحدود من الدرجة الثانية

نحصل على الجدول المقابل لتغيرات الدالة  $f$ :



أصغر قيمة للدالة  $f$  هي  $\frac{7}{2}$  تأخذها من أجل  $k = -\frac{3}{2}$ . هذا يعني أن أصغر قيمة

للعدد  $MC'^2$  هي:  $\frac{7}{2}$ . إذاً: أصغر قيم للمسافة  $MC'$  هي:  $\sqrt{\frac{7}{2}}$ .

### المسافة بين نقطة ومستوى

•  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.  $A(1; 2; -1)$  نقطة من هذا الفضاء.

نعبر المستويين  $P$  و  $P'$  حيث:  $(P): 2x - y + 2z - 5 = 0$  و

$$(P'): 2x + 2y - z - 4 = 0$$

• بين أن المستويين  $P$  و  $P'$  متعامدان.

• أحسب المسافة بين النقطة  $A$  وكل من المستويين  $P$  و  $P'$ .

• استنتج المسافة بين النقطة  $A$  والمستقيم  $\Delta$  الناتج من تقاطع

المستويين  $P$  و  $P'$ .

5

• يكفي التحقق من أن إحداثيات النقط الثلاث  $A, B, C'$  تحقق معادلة  $(ABC')$ ،  
علماً أنّها ليست على استقامة واحدة.

$$A \in (ABC') \text{ أي } 2(3) + 2(0) - (-1) - 7 = 6 + 1 - 7 = 0$$

$$B \in (ABC') \text{ أي } 2(2) + 2(1) - (-1) - 7 = 4 + 2 + 1 - 7 = 0$$

$$C' \in (ABC') \text{ أي } 2(4) + 2(2) - 5 - 7 = 8 + 4 - 5 - 7 = 0$$

• المسافة بين النقطة  $D$  والمستوي  $(ABC')$  تعطى بالعلاقة:  $\frac{|2x_D + 2y_D - z_D - 7|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{4}{3}$

هذه المسافة تمثل طول الارتفاع  $h$  النازل من الرأس  $D$  على القاعدة  $(ABC)$  في رباعي الوجوه  $ABCD$ .

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}sh = \frac{1}{3} \times \frac{9}{2} \times \frac{4}{3} = 2(u.v)$$

إذاً: حجم رباعي الوجوه  $ABCD$  يعطى بالعلاقة:

$$h = \frac{4}{3} \text{ و } s = S_{ABC'}$$

( $u, v$ ) يرمز إلى وحدة المساحة و ( $u, v$ ) يرمز إلى وحدة الحجم.

### المسافة بين نقطة ومستقيم

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.  $A(1; 2; 0), B(2; 3; -2), C'(0; 2; 4)$

• ثلاث نقط من هذا الفضاء.

• عيّن تمثيل وسيطي للمستقيم  $(AB)$ .

• عيّن النقطة  $M$  من المستقيم  $(AB)$  بحيث تكون المسافة  $MC'$  أصغر ما يمكن.

4

الحل: لدينا  $\overrightarrow{AB}(1; 1; -2)$  شعاع توجيه للمستقيم  $(AB)$

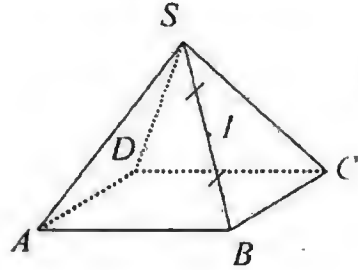
$$\overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AB} \text{ يكافئ } M(x; y; z) \in (AB)$$

$$k \in \mathbb{R} / \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ يكافئ}$$

$$\text{أي: } k \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = k + 1 \\ y = k + 2 \\ z = -2k \end{cases}$$

## تمارين للتدريب

1. هرم  $ABC'D'S$ ، قاعدته مربعة ورأسه  $S$ ، وأحرفه متقايسة وقيسها  $a$ .



$I$  منتصف الحرف  $[SB]$ .

• احسب بدلالة  $a$  الجداءات السلمية التالية:

$$\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}$$

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AC}$$

• عيّن قياسا للزاوية  $\hat{AIC}$ .

2.  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلّم متعامد ومتجانس للفضاء.  $A(2; -3; 4)$ ،  $B(1; 0; 2)$ ،  $C(2; -1; 2)$  و

$D(1; -1; 3)$  أربع نقط من هذا الفضاء.

بيّن أن النقط الأربعة  $A$ ،  $B$ ،  $C$ ، و  $D$  من نفس المستوي بطريقتين:

• بالتعبير عن الشعاع  $\overrightarrow{AD}$  بدلالة الشعاعين  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$ .

• بالبرهان أن النقطة  $D$  تنتمي إلى المستوي  $(ABC)$ .

3. مكعب  $ABCDEFGH$  مكعب. بيّن أن المستويين  $(BDE)$  و  $(CFH)$

متوازيين وذلك بطريقتين مختلفتين:

• بطريقة هندسية.

• باستعمال المعلوم  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$  ومعادلات المستويات.

4. مكعب  $ABCDEFGH$  مكعب.  $P$  مركز ثقل المثلث  $BEG$ .

باستعمال المعلوم  $(E; \overrightarrow{EF}; \overrightarrow{EH}; \overrightarrow{EA})$ . تعرّف على إحداثيات النقط

$E$ ،  $F$ ،  $B$ ،  $D$ ،  $G$  و  $P$ ، ثم بيّن أن النقط  $D$ ،  $F$  و  $P$  على استقامة واحدة.

5. مكعب  $ABCDEFGH$  مكعب قياس حرقه  $a$ . اهدف في هذا التمرين هو البرهان على

أن  $(AG) \perp (BDE)$  بثلاث طرق مختلفة.

الحل:  $\vec{n}(2; -1; 2)$  شعاع ناظم على المستوي  $P$  و  $\vec{n}'(2; 2; -1)$  شعاع ناظم على المستوي  $P'$ .

ولدينا:  $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 2 \times 2 + 2(-1) + (-1)2 = 0$  معاد  $\vec{n}$  و  $\vec{n}'$  وبالتالي المستويين  $P'$  و  $P$  متعامدين.

المسافة بين النقطة  $A$  والمستوي  $P$  تعطى بالعلاقة:  $\frac{|2(1) - (2) + 2(-1) - 5|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{7}{3}$

المسافة بين النقطة  $A$  والمستوي  $P'$  تعطى بالعلاقة:  $\frac{|2(1) + 2(2) - (-1) - 4|}{\sqrt{4+4+1}} = 1$

لتكن  $I$  المسقط العمودي للنقطة  $A$  على المستوي  $P$ . أي  $AI = \frac{7}{3}$  و  $I'$  المسقط العمودي

نقطة  $A$  على المستوي  $P'$ .

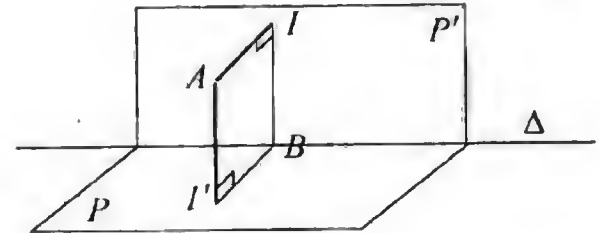
ي  $AI' = 1$ . نسمي  $B$  المسقط العمودي للنقطة  $A$  على المستقيم  $\Delta$ .

بنا الرباعي  $AIBI'$  مستطيل، ذلك لأن  $(BI) \perp (BI')$  و  $(AI) \perp (BI)$  (من المعطيات)

: المثلث  $AIB$  قائم في  $I$ . حسب فيثاغورث Pythagore لدينا:

$$AB^2 = AI^2 + IB^2 = \left(\frac{7}{3}\right)^2 + 1 = \frac{58}{9}$$

$AB = \frac{\sqrt{58}}{3}$  وهي المسافة بين النقطة  $A$  والمستقيم  $\Delta$ .



(1) بين أن النقطتين  $A$  و  $G$  تنتميان إلى المستوي المحوري للقطعة  $[BE]$  وكذلك إلى المستوي المحوري للقطعة  $[BD]$ . استنتج.

(2) بين أن:  $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$  وأن:  $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$ . استنتج أن  $(AG) \perp (BDE)$ .

(3) استعمل المعلم المتعامد والمتجانس  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$ .

6.  $ABCDEFGH$  مكعب. نعتبر المعلم المباشر للفضاء  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$ .

يرمز  $I$  إلى منتصف القطعة المستقيمة  $[EF]$ ، و  $J$  مركز المربع  $ADHE$ .

احسب مساحة المثلث  $IGA$ . احسب حجم رباعي الوجوه  $ABIG$ ، واستنتج

البعد بين النقطة  $B$  والمستوي  $(AIG)$ .

عين إحداثيات  $K$  نقطة تقاطع المستقيم  $(BJ)$  مع المستوي  $(AIG)$ .

اعد إذاً حساب المسافة بين النقطة  $B$  والمستوي  $(AIG)$ .

7.  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

$A(-1; 2; 0)$ ،  $B(-3; 4; 2)$ ،  $C(1; -2; -1)$  ثلاث نقط من هذا الفضاء.

بين أن الشعاعان  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$  غير مرتبطين خطياً.

بين أن الشعاع  $\vec{n}(a; b; c)$  يكون ناظم على المستوي  $(ABC)$  إذا وفقط إذا كان

$$\begin{cases} -a + b + c = 0 \\ 2a - 4b - c = 0 \end{cases}$$

استنتج مما سبق إحداثيات صحيحة نسبية للشعاع الناظم  $\vec{n}$  على المستوي  $(ABC)$

ومعادلة ديكرارية للمستوي  $(ABC)$ .

8.  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.  $(P)$  المستوي الذي يشمل

النقطة  $A(1; -2; 1)$  والشعاع  $\vec{n}(-2; 1; 5)$  ناظم عليه.

$(P')$  المستوي الذي معادلته الديكرارية هي:  $x + 2y - 7 = 0$ .

بين أن المستويان  $(P)$  و  $(P')$  متعامدان.

بين أن المستويان  $(P)$  و  $(P')$  يتقاطعان وفق المستقيم  $(\Delta)$  الذي يشمل النقطة

$C(-1; 4; -1)$  وشعاع توجيهه  $\vec{d}(2; -1; 1)$ .

احسب المسافة بين النقطة  $B(5; -2; -1)$  وكلا من المستويين  $(P)$  و  $(P')$ ، ثم عين

المسافة بين النقطة  $B$  والمستقيم  $(\Delta)$ .

9.  $ABCDEFGH$  مكعب. نرمز بـ  $I$  و  $I'$  لمركزي الوجهين  $ADHE$  و

$BCGF$  على الترتيب.

$N$  و  $P$  نقطتان من القطعتين  $[HF]$  و  $[AC]$  على الترتيب المعرفتان بـ:  $\overline{HN} = k\overline{HF}$

و  $\overline{AP} = k\overline{AC}$  حيث:  $k \in [0; 1]$ .

بين أن النقطة  $N$  هي مرجح الجملة المثقلة  $\{(H; 1-k); (F; k)\}$  وأن النقطة  $P$  هي

مرجح الجملة المثقلة  $\{(A; 1-k); (C; k)\}$ .

نعتبر النقطة  $J$  منتصف القطعة  $[NP]$ ، بين أن:  $\overline{HN} + \overline{AP} = 2\overline{IJ}$  و

$$\overline{HF} + \overline{AC} = 2\overline{II'}$$

استنتج أن:  $\overline{IJ} = k\overline{II'}$  /  $k \in [0; 1]$ .

ما هي مجموعة النقط  $J$  عندما يتغير  $k$  في المجال  $[0; 1]$ ؟

10.  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء. عين تقاطع سطح الكرة  $(\Gamma)$  الذي

مركزه  $\Omega(1; -1; 1)$  ونصف قطره 3 مع المستوي  $(xOy)$ .



# 10 - المقاطع المستوية للسطوح

## Hard equation

ما يجب أن يعرف:

★ مقطع سطح بمستو مواز لأحد مستويات الإحداثيات

◆ حالة الاسطوانة الدورانية

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

$(I')$  اسطوانة دورانية محورها  $(O; \vec{i})$  ونصف قطرها  $r$ .

• مقطع  $(I')$  بالمستوي الذي معادلته  $x = a$  أو  $y = a$  هي الدائرة  $C'_a$

مركزها  $\Omega(0;0;a)$  ونصف قطرها  $r$ .

• مقطع  $(I')$  بالمستوي الذي معادلته  $x = a$  أو  $y = a$  هي مستقيم،

إتحاد مستقيمين أو مجموعة خالية.

للحفظ

إذا كان  $(C')$  مقطع الاسطوانة الدورانية  $(I)$  بالمستوي العمودي

على محورها فإن  $(I)$  هو:

• اتحاد الدوائر صور  $(C')$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\vec{k}$  حيث  $\lambda$  يسمح

بمجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء الصفر.

• اتحاد المستقيمات الموازية للمستقيم  $(O; \vec{i})$  والتي تقطع  $(C')$ .

◆ حالة المخروط الدوراني

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.  $(I')$  مخروط دوراني غير محدود محوره  $(O; \vec{i})$  ومركزه  $O$ .

• مقطع  $(I')$  بالمستوي الذي معادلته  $x = a$  أو  $y = a$  هو الدائرة  $C'_a$  التي

مركزها  $\Omega(0;0;a)$ .

• مقطع  $(I')$  بالمستوي الذي معادلته  $x = a$  أو  $y = a$  هو اتحاد مستقيمين أو قطع زائد.

للحفظ

إذا كان  $(C')$  مقطع المخروط الدوراني غير المحدود  $(I')$  بالمستوي

العمودي على محوره والذي لا يشمل  $O$  فإن  $(I')$  هو:

• اتحاد الدوائر صور  $(C')$  بالتحاكيات التي مركزها  $O$  ونسبتها  $\lambda$  حيث

$\lambda$  يسمح بمجموعة الأعداد الحقيقية ماعدا 0.

• اتحاد المستقيمات التي تشمل انبداً  $O$  ونقطة من  $(C')$ .

★ الدوال ذات متغيرين

◆ السطوح

تعريف

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

$f$  الدالة العددية للمتغيرين  $x$  و  $y$  معرفة على المجال  $I$  بالنسبة للمتغير  $x$

وعلى المجال  $J$  بالنسبة للمتغير  $y$ .

بمجموعة النقط  $M(x; y; z)$  حيث:  $x \in I$  و  $y \in J$  و  $z = f(x; y)$

تدعى سطح  $\Sigma$  من الفضاء يمثل الدالة  $f$ ، و  $z = f(x; y)$  هي معادلة

ديكارنية للسطح  $\Sigma$ .

مقطع السطح  $\Sigma$  بالمستوي الذي معادلته  $z = \lambda$  حيث:  $\lambda \in \mathbb{R}$  يدعى

منحني الدالة  $f$  من المستوى  $\lambda$ .

◆ أسطح خاصة

• السطح الذي معادلته  $z = x^2 + y^2$  يدعى مجسم مكافئ دوراني  $Paraboloid e$ .

منحنياته من المستوى هي دوائر.

مقطعه بالمستويات الموازية لأحد المستويين  $(x=0)$  أو  $(y=0)$  هو قطع مكافئ.

إذا كان  $(P)$  القطع المكافئ الذي معادلته  $z = x^2$  في المستوى المزود بالمعلم  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

فإننا نحصل على المجسم المكافئ الدوراني، بدوران  $(P)$  حول المحور  $(O; \vec{i})$ .

## الأسطوانة الدورانية - المخروط الدوراني - سطح الكرة

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.  $A(1; 1; \sqrt{6})$ ،  $B(1; 2; 3)$

و  $C(0; 0; 1)$  ثلاث نقط من هذا الفضاء.

• أعط معادلة المخروط الدوراني  $\Gamma$  الذي محوره  $(Oz)$  ورأسه  $O$  ويشمل

النقطة  $A$ . أحسب  $\theta$  زاويته عند الرأس.

• أعط معادلة الأسطوانة الدورانية  $\Psi$  التي محورها  $(Oz)$  وتشمل النقطة  $B$ .

• تعتبر سطح الكرة  $S$ ، التي مركزها  $C$  ونصف قطرها  $3$ . عيّن طبيعة المجموعة

$\Psi \cap S$  واعط معادلة ديكرتية لها.

2

الحل: للمخروط الدوراني  $\Gamma$  معادلة من الشكل:  $x^2 + y^2 - \alpha^2 z^2 = 0$

بما أن  $A \in \Gamma$  فإن:  $1^2 + 1^2 - \alpha^2 \sqrt{6}^2 = 0$  أي  $\alpha^2 = \frac{1}{3}$  وبالتالي:  $\Gamma: x^2 + y^2 - \frac{1}{3}z^2 = 0$

نضع:  $H(0; 0; \sqrt{6})$  المسقط العمودي للنقطة  $A$  على المحور  $(Oz)$ .

ينتج أن المثلث  $OHA$  قائم في  $H$ . إذا:  $\tan \theta = \frac{AH}{OH} = \frac{1}{\sqrt{3}}$  منه  $\theta = \frac{\pi}{6}$ .

للأسطوانة الدورانية  $\Psi$  معادلة من الشكل:  $x^2 + y^2 = r^2$

بما أن  $B \in \Psi$  فإن:  $1^2 + 2^2 = r^2$  أي  $r^2 = 5$  وبالتالي:  $\Psi: x^2 + y^2 = 5$

معادلة سطح الكرة  $S$ ، هي:  $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 9$

$M(x; y; z) \in \Psi \cap S$  معناه  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 9 \end{cases}$  يكافئ  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ z = -1 \end{cases}$  أو  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ z = 3 \end{cases}$

هي اتحاد الدائرتين  $(C)$  و  $(C')$ ،

$(C)$  مركزها  $\alpha(0; 0; -1)$  ونصف قطرها  $\sqrt{5}$  وتقع في المستوي الذي معادلته  $z = -1$ .

$(C')$  مركزها  $\omega'(0; 0; 3)$  ونصف قطرها  $\sqrt{5}$  وتقع في المستوي الذي معادلته  $z = 3$ .

## الدالة ذات متغيرين

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.  $A(1; -1; 0)$ ،  $B(2; 0; 4)$

نقطتان من هذا الفضاء. نعتبر السطح  $(\Gamma)$  الذي معادلته  $z = x^2 - y^2$ .

يبين أن المستقيم  $(AB)$  محتوي في السطح  $(\Gamma)$ .

3

• السطح الذي معادلته  $z = xy$  يدعى مجسم زائدي دوراني *hyperboloi de*.

منحنياته من المستوى هي قطوع زائدة معادلته  $xy = k$  حيث  $k$  عدد حقيقي غير معدوم.

في حالة  $k = 0$  نحصل على اتحاد المحورين  $(Ox)$  و  $(Oy)$ .

## تمارين محلولة

## السطوح

$\Sigma$  سطح معادلته  $z = x^2 - 2x + y^2 - 2$

اكتب معادلة  $\Sigma$  بالشكل:  $z = (x - a)^2 + y^2 + b$

حيث  $a$  و  $b$  عددا حقيقيان يطلب تعيينهما.

استنتج أن  $\Sigma$  محتواة في نصف الفضاء المعرف بـ:  $z \geq -3$ .

1

الحل: لدينا  $z = x^2 - 2x + y^2 - 2$  تكافئ  $z = x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 - 2$

تكافئ  $z = (x - 1)^2 + y^2 - 3$

إذا:  $a = 1$  و  $b = -3$ .

من أجل كل  $x$  و  $y$  من  $R$ ،  $(x - 1)^2 + y^2 \geq 0$  وبالتالي  $z \geq -3$

من أجل كل نقطة  $M(x; y; z) \in \Sigma$  من الفضاء، معناه  $z = (x - 1)^2 + y^2 - 3$

منه  $z \geq -3$ .

أي  $\Sigma$  محتواة في نصف الفضاء المعرف

بـ:  $x$  و  $y$  من  $R$  و  $z \geq -3$ .

استلزام

الحل: لدينا: من أجل كل نقطة  $M(x, y, z) \in (AB)$  من الفضاء،

$$\overline{AM} = k \cdot \overline{AB} \text{ أي: } \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{وبالتالي: } \begin{cases} x = k+1 \\ y = k-1 \\ z = 4k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R} \text{ هو تمثيل ديكارتي للمستقيم } (AB).$$

هل إحداثيات نقطة  $M$  من المستقيم  $(AB)$  تحقق معادلة  $(\Gamma)$  ؟

$$(k+1)^2 - (k-1)^2 = k^2 + 2k + 1 - k^2 + 2k - 1 = 4k = z$$

#### الدالة ذات متغيرين

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

نعتبر السطح  $(\Gamma)$  الذي معادلته  $z = 2e^{-(x^2 + y^2)}$

- يبين أن السطح  $(\Gamma)$  محصور بين المستويين الذين معادلتهما  $z=0$  و  $z=2$ .
- يبين أن السطح  $(\Gamma)$  يقل دروة عظمى وحيدة يقطب تعيينها.

الحل: من أجل كل نقطة  $M(x, y, z) \in (\Gamma)$  من الفضاء،

$$z = 2e^{-(x^2 + y^2)} \text{ معناه}$$

لدينا: من أجل كل  $x$  و  $y$  من  $\mathbb{R}$ ،  $x^2 + y^2 \geq 0$  وبالتالي  $-(x^2 + y^2) \leq 0$

أي  $e^{-(x^2 + y^2)} \leq e^0$  يعني أن  $0 < z \leq 2$  كون العدد الأسّي  $e^x$  موجب تماماً.

إذاً:  $(\Gamma)$  محصور بين المستويين الذين معادلتهما  $z=0$  و  $z=2$ . (دون أن يقطع المستوي  $z=0$ )

لدينا النقطة  $M_0(0;0;2)$  تنتمي إلى السطح  $(\Gamma)$ ، ومن الحصر السابق، كل نقطة من

$(\Gamma)$  تحقق  $z \leq 2$  فإن  $M_0(0;0;2)$  دروة عظمى للسطح  $(\Gamma)$ . هل هي وحيدة؟

نبحث عن  $x, y$  من  $\mathbb{R}$  علماً أن  $z=2$ .

$$2 = 2e^{-(x^2 + y^2)} \text{ يكافئ } -(x^2 + y^2) = 0 \text{ يكافئ } x=0 \text{ و } y=0$$

إذاً: النقطة  $M_0(0;0;2)$  دروة عظمى وحيدة للسطح  $(\Gamma)$ .

#### دراسة سطح معادلته من الشكل $z = f(x, y)$

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

نعتبر السطح  $(\Gamma)$  الذي معادلته  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

• عيّن تقاطع السطح  $(\Gamma)$  مع كل من المستويين:  $x=0$  و  $(P)$  و

$$(P'): y=2$$

• ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي  $k$ ، مجموعة تقاطع  $(\Gamma)$  مع

$$\text{المستوي } (P_k): z=k$$

الحل: من أجل كل نقطة  $M(x, y, z) \in (\Gamma)$  من الفضاء،

$$M(x, y, z) \in (\Gamma) \cap (P) \text{ معناه } \begin{cases} z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \\ x = 0 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} z = \frac{1}{2}y^2 \\ x = 0 \end{cases} \text{ هي قطع مكافئ،}$$

$$\text{معادلته } z = \frac{1}{2}y^2 \text{ في المستوي } (P).$$

$$M(x, y, z) \in (\Gamma) \cap (P') \text{ معناه } \begin{cases} z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \\ y = 2 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} z = \frac{1}{2}x^2 + 2 \\ y = 2 \end{cases} \text{ هي قطع مكافئ،}$$

$$\text{معادلته } z = \frac{1}{2}x^2 + 2 \text{ في المستوي } (P').$$

$$M(x, y, z) \in (\Gamma) \cap (P_k) \text{ معناه } \begin{cases} z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \\ z = k \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} x^2 + y^2 = 2k \\ z = k \end{cases}$$

نناقش ثلاثة حالات  $(k > 0, k = 0, k < 0)$

في حالة  $k < 0$ . الكتابة  $x^2 + y^2 = 2k$  مستحيلة (مجموع مربعين هو عدد موجب)

$$\text{إذاً: } (\Gamma) \cap (P_k) = \emptyset$$

$$\text{في حالة } k = 0. \text{ تكافئ } x=0 \text{ و } y=0 \text{ و } z=0 \text{ إذاً: } (\Gamma) \cap (P_k) = \{O\}$$

في حالة  $k > 0$ . الجملة  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2k \\ z = k \end{cases}$  تعين دائرة. إذا:  $(\Gamma) \cap (P_k)$  الدائرة التي مركزها  $\Omega(0;0;k)$  ونصف قطرها  $\sqrt{2k}$  وتقع في المستوي الذي معادلته  $z = k$ .

## تمارين للتدريب

1.  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.  $(\Sigma)$  الاسطوانة الدورانية التي محورها  $(Oz)$  وتشمل النقطة  $A(1;2;3)$ .

عَيِّن معادلة ديكارتية للأسطوانة  $(\Sigma)$ ، ثم عَيِّن مقطع  $(\Sigma)$  بكل من المستويات التي معادلاتها:  $x = 2$ ،  $y = -3$  و  $z = -4$ .

2.  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.  $(\Sigma)$  المخروط الدوراني الذي محوره  $(Oz)$  ورأسه  $O$  ويشمل النقطة  $A(1;2;3)$ .

عَيِّن معادلة ديكارتية للمخروط  $(\Sigma)$ ، ثم عَيِّن مقطع  $(\Sigma)$  بكل من المستويات التي معادلاتها:  $z = -2$ ،  $x = 1$  و  $z = y$ .

3.  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.  $(\Gamma)$  المخروط الدوراني الذي محوره  $(Oz)$  ورأسه  $O$  وزاويته  $\frac{\pi}{3}$ .

تحقق أن النقطة  $A(1; \sqrt{2}; 1)$  تنتمي إلى  $(\Gamma)$ ، ثم أعط معادلة للمخروط  $(\Gamma)$ .

لتكن  $(\Sigma)$  سطح الكرة التي مركزها  $\Omega(0;0;1)$  ونصف قطرها 1،

عَيِّن المجموعة  $(\Gamma) \cap (\Sigma)$ .

4.  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.  $(D)$  استقيم الذي يشمل انبداً  $\vec{n} = 2\vec{i} - \vec{k}$  وشعاع توجيهه  $\vec{k}$ .

$(\Gamma)$  المخروط الدوراني الذي رأسه  $O$  ومحوره  $(Oz)$  ويشمل الاستقيم  $(D)$ .

أعط معادلة للمخروط الدوراني  $(\Gamma)$ .

عَيِّن قيمة العدد الحقيقي الموجب تماماً  $a$  بحيث يكون مقطع المخروط  $(\Gamma)$  بالمستوي ذي المعادلة  $z = a$  هو دائرة نصف قطرها 2 يطلب تعيين مركزها.

5.  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

نعتبر السطح  $(\Gamma)$  الذي معادلته  $z = f(x; y)$ .

من أجل كل عدد حقيقي  $k$ ، المنحني ذي المستوى  $k$  للدالة  $f$  هو المستقيم الذي يشمل النقطة  $A(-k; k+1; k)$  وشعاع توجيهه  $\vec{j} - 2\vec{i}$ . نعرف على السطح  $(\Gamma)$  والدالة  $f$ .

6.  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء. نعتبر السطح  $(\Gamma)$  ذي المعادلة

$$x^2 + y^2 = z^2 + 1$$

• ما هي انعطاف من  $(\Gamma)$ ، الأقرب إلى محور  $(Oz)$ ؟

•  $A$  نقطة كيفية من  $(\Gamma)$ ، كم عدد المستقيمات التي تشمل  $A$  ومحتواة في السطح  $(\Gamma)$ ؟

7.  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء. نعتبر السطح  $(\Gamma)$  الذي معادلته

$$z = x^2 - y^2$$

$(P)$ ،  $(P')$  و  $(P'')$  ثلاثة مستويات معادلاتها  $x = 2$ ،  $y = 3$  و  $z = -2$  على الترتيب.

• عَيِّن مقطع السطح  $(\Gamma)$  بكل من المستويين  $(P)$  و  $(P')$ .

• نعتبر المعلم للفضاء  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  حيث:  $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} - \vec{j})$  و  $\vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$ .

ونضع:  $(x; y; z)$  و  $(X; Y; Z)$  إحداثيات النقطة  $M$  في معلمين  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  و  $(O; \vec{u}; \vec{v}; \vec{k})$  على الترتيب.

أعط معادلة ديكارتية للسطح  $(\Gamma)$  في المعلم  $(O; \vec{u}; \vec{v}; \vec{k})$ ، ثم استنتج مقطع السطح  $(\Gamma)$  بالمستوي  $(P'')$ .

8.  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.  $f$  الدالة العددية للمتغيرين  $x$  و  $y$

من  $R$  معرفة بالدستور:  $f(x; y) = x^2 - 2x + y^2 + y - 1$ . و  $(\Gamma)$  السطح الذي معادلته

$$z = f(x; y)$$

• اكتب  $f(x; y)$  بالشكل:  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + c$  حيث  $a, b, c$  أعداد حقيقية

يطلب تعيينها.

• بين أن الدالة  $f$  تقبل قيم حدية صغرى يطلب تعيينها.

• عَيِّن مقطع السطح  $(\Gamma)$  بكل من المستويين:  $(P): x = 1$  و  $(P'): z = -1$ .

• عيّن تقاطع السطح  $(\Gamma)$  مع سطح الكرة التي مركزها  $\Omega\left(1:-\frac{1}{2}:-\frac{9}{4}\right)$

ونصف قطرها 1.

9.  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء. نعتبر السطح  $(\Gamma)$  الذي معادلته

$$z = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1}$$

• بيّن أن السطح  $(\Gamma)$  محصور بين المستويين اللذين معادتهما  $z = 0$  و  $z = 2$ .

• نعتبر المستوي  $(P_k)$  الذي معادلته  $z = k$ .

• عيّن تقاطع السطح  $(\Gamma)$  مع المستوي  $(P_1)$ .

• ناقش حسب قيم العدد الحقيقي  $k$  مقطع السطح  $(\Gamma)$  بالمستوي  $(P_k)$ .

• ارسم المساقط العمودية لمقاطع السطح  $(\Gamma)$  مع كل من المستويات  $(P_{0.5})$ ،

$(P_1)$ ،  $(P_{1.5})$  و  $(P_2)$  على المستوي المزود بالمعلم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

10.  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء. نعتبر السطح  $(\Gamma)$  الذي

$$\text{معادلته } z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$$

من أجل كل عدد حقيقي  $k$ ، نضع:  $(P_k): z = k$  و  $(H_k): x = k$ .

• بيّن أن السطح  $(\Gamma)$  يقبل ذروة صغرى  $A(0:0:1)$ .

• ناقش حسب قيم العدد الحقيقي  $k$  مقطع السطح  $(\Gamma)$  بالمستوي  $(P_k)$ .

• نضع:  $\vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{k} - \vec{j})$ ،  $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{j} + \vec{k})$  و  $I_k$  النقطة ذات

الإحداثيات  $(k; 0; 0)$ .

تأكد من أن  $(I_k; \vec{u}; \vec{v})$  معلم متعامد ومتجانس.

باستعمال المعلم  $(I_k; \vec{u}; \vec{v})$  عيّن مقطع السطح  $(\Gamma)$  بالمستوي  $(H_k)$ .

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي و للمؤلف بالخير



و النجاح و المَغفَرة

**Hard\_equation**

Hard\_equation

الفصل الثاني

مواضيع امتحانات البكالوريا

لدول أجنبية

(مع حلولها)



الموضوع الأول

بكالوريا علوم تجريبية ----- سبتمبر 2005 ----- فرنسا

التمرين 1 (7 نقط)

الجزء A .

الدالة  $f$  معرفة على المجال  $[0; +\infty[$  بالدستور:  $f(x) = (20x + 10)e^{-\frac{1}{2}x}$ .

يرمز  $(C_f)$  للتمثيل البياني للدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .  
(وحدة الرسم 1cm).

1. ادرس نهاية الدالة  $f$  عند  $+\infty$ .

2. ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$ : وارسم جدول تغيراتها.

3. بين أن المعادلة  $f(x) = 10$  تقبل حلاً واحداً  $\alpha$  في المجال  $[0; +\infty[$ . أعط قيمة عشرية مقربة إلى  $10^{-3}$  للعدد  $\alpha$ .

4. أرسم المنحني  $(C_f)$ .

5. أحسب التكامل  $I = \int_0^3 f'(x) dx$ .

الجزء B .

نرمز بـ  $y(t)$  للقيمة العددية لدرجة حرارة تفاعل كيميائي معين في اللحظة  $t$ . (وحدة الدرجة

هي  $^{\circ}C$  ووحدة الزمن  $t$  هي الساعة  $h$ ). القيمة الابتدائية في اللحظة  $t = 0$  هي  $y(0) = 10$ .

نقبل أن الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي  $t$  من المجال  $[0; +\infty[$  القيمة  $y(t)$  هي حلاً للمعادلة

$$y' + \frac{1}{2}y = 20e^{-\frac{1}{2}t} \quad (E).$$

1. تحقق أن الدالة  $f$  التي درست في الجزء A هي حلاً للمعادلة  $(E)$  في المجال  $[0; +\infty[$ .

2. نريد البرهان على أن الدالة  $f$  هي الحل الوحيد للمعادلة  $(E)$  في المجال  $[0; +\infty[$  والتي

تأخذ القيمة 10 عند اللحظة 0.

أ.  $g$  ترمز إلى أحد حلول المعادلة  $(E)$  في المجال  $[0; +\infty[$  والتي تحقق  $g(0) = 10$ .

بين أن الدالة  $g - f'$  هي حلاً في المجال  $[0; +\infty[$  للمعادلة التفاضلية  $y' + \frac{1}{2}y = 0$ .  $(H')$ .

ب. حل المعادلة التفاضلية  $(E')$ .

ج. استنتج.

3. في حدود أي زمن نترز درجة حرارة التفاعل الكيميائي إلى قيمتها الابتدائية؟ يطلب تدوير النتيجة إلى الدقيقة.

4. القيمة  $\theta$  مقدرة بوحدة الدرجة تمثل درجة الحرارة المتوسطة لهذا التفاعل الكيميائي في الساعات الثلاث الأولى وهي القيمة المتوسطة للدالة  $f$  على المجال  $[0; 3]$ .

أحسب القيمة المظبوطة للعدد  $\theta$ ، ثم أعط القيمة العشرية للعدد  $\theta$  مدورة إلى الوحدة  $10^{-n}$ .

التمرين 2 (5 نقط)

من أجل كل سؤال هناك جواب واحد صحيح من بين الأجوبة المقترحة، يعين المترشح على ورقة الأجوبة، رقم السؤال والحرف المقابل للجواب المختار.

كل اجابة صحيحة تساوي 1 نقطة، وكل اجابة خاطئة تساوي 0.5 - نقطة وعدم الأجابة تعادل 0 نقطة. إذا كان المجموع في التمرين سالباً، فالمترشح يحصل على 0 في التمرين. لا يطلب أي تعليل.

1.  $\pi$  عدد مركب طويلته  $\sqrt{2}$  والعدد  $\frac{\pi}{3}$  عمدة له: لدينا:

$$z^{14} = -128\sqrt{3} - 128i : (A) \quad z^{14} = -64 + 64i\sqrt{3} : (C')$$

$$z^{14} = 64 - 64i : (B) \quad z^{14} = -128 - 128i\sqrt{3} : (D)$$

2. في المستوي المركب المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس، نعتبر النقطة  $S$  ذات اللاحقة 3 والنقطة  $T$  ذات اللاحقة 4i.

$(E)$  مجموعة النقط  $M$  من هذا المستوي والتي لاحقتها  $\pi$  تحقق:  $|3 - 4i| = |\pi - 3|$ .

$(A) : (E)$  هي محور القطعة  $[ST]$ .  $(B) : (E)$  هي المستقيم  $(ST)$ .

$(C) : (E)$  هي الدائرة التي مركزها  $\Omega$  ذات اللاحقة  $(3 - 4i)$  ونصف قطرها 3.

$(D) : (E)$  هي الدائرة التي مركزها  $S$  ونصف قطرها 5.

3. نعتبر  $ABCDEF$  سداسي أضلاع منتظم طول ضلعه 1. الجداء السلمي  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CF}$  يساوي:

(A)  $\sqrt{3}$  (B)  $-\sqrt{3}$  (C)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  (D)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4.  $g$  الدالة المعرفة على المجال  $]-\infty; 0]$  بالدستور:  $g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x - 3}$  و  $(C_g)$  تمثيلها

البياني في المستوي المنسوب إلى معلم.

(A)  $(C_g)$  يقبل مستقيم مقارب معادلته  $y = -1$ .

(B)  $(C_g)$  لا يقبل مستقيماً مقاربة.

(C)  $(C_g)$  يقبل مستقيم مقارب معادلته  $y = x$ .

(D)  $(C_g)$  يقبل مستقيم مقارب معادلته  $y = 1$ .

5.  $f$  الدالة المعرفة على  $R$  بالدستور:  $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ . الدالة المشتقة الثانية  $f''$

للدالة  $f$  على  $R$  معرفة بـ:

(A)  $f''(x) = \int_0^x -2te^{-t^2} dt$  (B)  $f''(x) = \int_0^x -2xe^{-x^2} dx$

(C)  $f''(x) = -2xe^{-x^2}$  (D)  $f''(x) = e^{-x^2}$

التمرين 3 (5 نقط)

لفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

(P) المستوي الذي يشمل النقطة  $B(1; -2; 1)$  وشعاعه الناظم  $\vec{n}(-2; 1; 5)$  و  $(P')$  المستوي

الذي معادلته  $x + 2y - 7 = 0$ .

أ. بين أن المستويين  $(P)$  و  $(P')$  متعامدين.

ب. بين أن تقاطع المستويين  $(P)$  و  $(P')$  هو المستقيم  $(\Delta)$  الذي يشمل النقطة  $C(-1; 4; -1)$

وشعاع توجيهه  $\vec{u}(2; -1; 1)$ .

ج. نعتبر النقطة  $A(5; -2; -1)$ . أحسب المسافة بين النقطة  $A$  والمستوي  $(P)$ ، ثم بين

النقطة  $A$  والمستوي  $(P')$ .

د. عين المسافة بين النقطة  $A$  والمستقيم  $(\Delta)$ .

2. نعتبر النقطة  $M$  ذات الإحداثيات  $(1; 3; 2)$  حيث  $I$  عدد حقيقي.

أ. أعط عبارة الطول  $IM$  بدلالة  $I$ . ورمز هذه الظهور بـ  $\varphi(I)$  حيث  $\varphi$  دالة من  $R$  نحو  $R$ .

ب. ادرس اتجاه تغير الدالة  $\varphi$  على  $R$ ، وحدد قيمتها الصغرى.

ج. فسّر هندسيا هذه القيمة الصغرى.

التمرين 4 (5 نقط)

الجزء A.

زهرة نرد على شكل رباعي وجوه منتظم، لها وجه أزرق ووجهان حمراوان ووجه أخضر، نفرض أن الزهرة متوازنة تماماً.

جولة للعب تتمثل في إجراء رميتين متتاليتين ومستقلتين لهذا النرد، في كل رمية نسجل لون وجه القاعدة (الوجه الذي لا يظهر).

نعتبر الحادتين التاليتين:

$E$  هي الحادثة: في ختام الجولة يكون الوجهان المسجلان خضراوين.

$F$  هي الحادثة: في ختام الجولة يكون الوجهان المسجلان من نفس اللون.

1. احسب احتمال الحادتين  $E$  و  $F$ ، ثم احسب احتمال الحادثة  $E \cap F$  علماً بـ  $P$ .

2. نحري عشر جولات متشابهة ومستقلة.

احسب احتمال الحصول مرتين على الأقل على الحادثة  $F$ . (يعطى قيمة عشرية مقربة إلى  $10^{-3}$ ).

### تصحيح الموضوع الأول

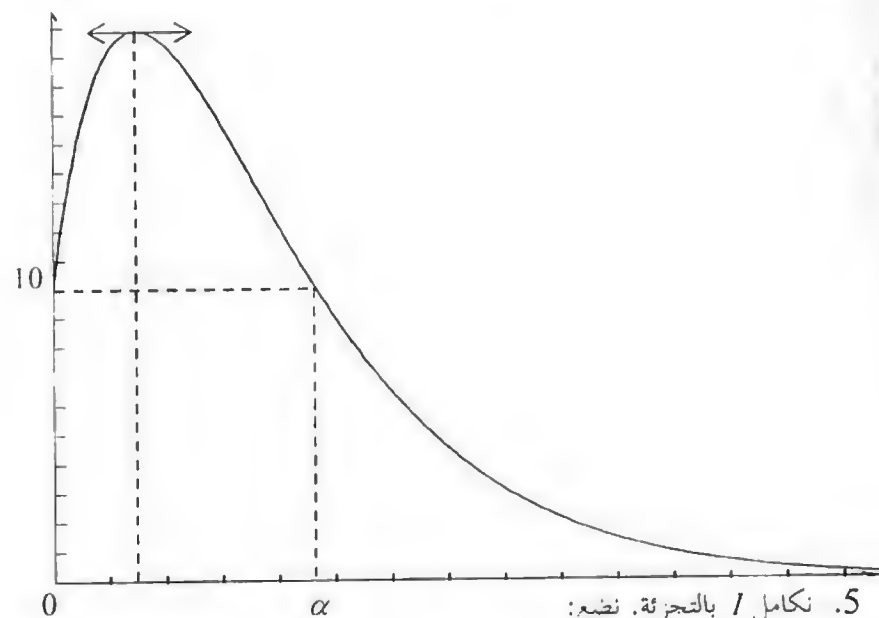
بكالوريا علوم تجريبية --- سبتمبر 2005 --- فرنسا

التمرين 1 (7 نقط)

الجزء A.

1. نضع:  $X = \frac{x}{2}$  فتكتب  $f(x)$  بالشكل:

$$f(x) = \left(40 \frac{x}{2} + 10\right) e^{-\frac{1}{2}x} = 40 \frac{x}{e^{\frac{x}{2}}} + \frac{10}{e^{\frac{x}{2}}}$$



5. نكمل  $I$  بالتجزئة. نضع:

$$\begin{cases} u'(x) = 20 \\ v'(x) = -2e^{-\frac{1}{2}x} \end{cases} \quad \text{ينتج أن} \quad \begin{cases} u(x) = 20x + 10 \\ v(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \end{cases}$$

$$I = \left[ -2(20x + 10)e^{-\frac{1}{2}x} \right]_0^3 + \int_0^3 40e^{-\frac{1}{2}x} dx = \left[ -2(20x + 10)e^{-\frac{1}{2}x} \right]_0^3 - \left[ 80e^{-\frac{1}{2}x} \right]_0^3$$

وبالتالي:

$$= 100 - 220e^{-3/2} \approx 50.91$$

الجزء B.

1. لدينا: من أجل كل  $I$  من المجال  $[0; +\infty[$ ,

$$f'(t) + \frac{1}{2}f(t) = 20e^{-\frac{1}{2}t} + (-10t - 5)e^{-\frac{1}{2}t} + (10t + 5)e^{-\frac{1}{2}t} = 20e^{-\frac{1}{2}t}$$

يعني أن الدالة  $f$  هي حلاً للمعادلة  $(E)$  في المجال  $[0; +\infty[$ .

إذا:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  كون  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 40(0) + 10(0) = 0^+$  و  $\frac{1}{+\infty} = 0^+$

$$2. f'(x) = (20 - 10x - 5)e^{-\frac{1}{2}x} = 5(3 - 2x)e^{-\frac{1}{2}x}$$

نلاحظ أن العدد  $f'(x)$  له

إشارة العدد  $(3 - 2x)$  كون  $5e^{-\frac{1}{2}x} > 0$

إذا:  $f$  متزايدة تماماً على  $\left[0; \frac{3}{2}\right]$  ومتناقصة تماماً على  $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right]$ . جدول التغيرات يعطى

كمايلي:

$x$	0	$\frac{3}{2}$	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0		
$f(x)$	10	$40e^{-3/4}$	10	$0^+$

3. في المجال  $\left[0; \frac{3}{2}\right]$ : الدالة  $f$  مستمرة ومتزايدة تماماً ولدينا:

$$\left[ f\left(\left[0; \frac{3}{2}\right]\right) \right] = \left[ 10; 40e^{-3/4} \right] \text{ أي المعادلة } f(x) = 10 \text{ لا تقبل حلول.}$$

في المجال  $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right]$ : الدالة  $f$  مستمرة ومتناقصة تماماً ولدينا:  $\left[ f\left(\left[\frac{3}{2}; +\infty\right]\right) \right] = \left[ 0; 40e^{-3/4} \right]$

و  $40e^{-3/4} \approx 18.9$  إذا: يوجد عدد حقيقي وحيد  $\alpha$  في المجال  $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right]$

بحيث  $f(\alpha) = 10$

أي المعادلة  $f(x) = 10$  تقبل حلاً واحداً  $\alpha$  في المجال  $[0; +\infty[$ . بالحاسبة نجد  $\alpha \approx 4.673$ .

4. رسم المنحني

2. بما أن  $g$  حلاً للمعادلة  $(E)$  هذا يعني أن  $g'(t) + \frac{1}{2}g(t) = 20e^{-\frac{1}{2}t}$  ولدينا مما سبق:

$$f'(t) + \frac{1}{2}f(t) = 20e^{-\frac{1}{2}t}$$

بالطرح طرف من طرف و من أجل كل  $t$  من المجال  $[0; +\infty[$ ، نحصل على:

$$g'(t) + \frac{1}{2}g(t) - f'(t) - \frac{1}{2}f(t) = 0$$

أي  $(g-f)'(t) + \frac{1}{2}(g-f)(t) = 0$ . نستنتج أن الدالة  $(g-f)$  هي حلاً في

$$[0; +\infty[ \text{ للمعادلة التفاضلية } (E'): y' + \frac{1}{2}y = 0.$$

حلول المعادلة  $(E')$  في المجال  $[0; +\infty[$  هي الدوال:  $\lambda \in \mathbb{R} / t \mapsto \lambda e^{-\frac{1}{2}t}$ .

بما أن الدالة  $(g-f)$  هي حلاً للمعادلة  $(E')$  فإن:  $(g-f)(0) = \lambda e^0$  أي

$$g(0) - f(0) = \lambda \text{ و علماً أن } g(0) = f(0) = 10 \text{ فإن } \lambda = 0.$$

إذاً: الدالة  $(g-f)$  هي الدالة المعدومة. أي من أجل كل  $t$  من المجال  $[0; +\infty[$ ،

$$g(t) = f(t)$$

الاستنتاج: المعادلة التفاضلية  $(E)$  تقبل حلاً واحداً  $g$  في المجال  $[0; +\infty[$  يحقق  $g(0) = 10$

وهو الدالة  $f$ .

3. القيمة الابتدائية هي  $g(0) = 10$ . وحسب السؤال 3 من الجزء A، تتزل درجة حرارة

التفاعل الكيميائي إلى قيمتها الابتدائية 10 في حدود الزمن  $\alpha$  كون  $f(\alpha) = 10$ . ولدينا

$$\text{حسب ماسبق: } \alpha \approx 4.673 \text{ أي } \alpha \approx 4h 41 \text{ min.}$$

$$\theta = \frac{1}{3-0} \int_0^3 f(x) dx = \frac{1}{3} (100 - 220e^{-3/2}) \approx 17^\circ \text{C.}$$

التمرين 2 (5 نقط)

1. الجواب C، 2. الجواب D، 3. الجواب B، 4. الجواب A، 5. الجواب C.

التمرين 3 (5 نقط)

1. أ) السماع الناظم للمستوي  $(P')$  هو  $\vec{n}'(1;2;0)$  بما أن:  $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 6$

فإن السماعان  $\vec{n}$  و  $\vec{n}'$  متعامدان وبالتالي تعامد المستويين  $(P)$  و  $(P')$ .

ب) نوجد أولاً معادلة للمستوي  $(P)$ . نعلم أنها من الشكل:

$$B \in (P) \text{ وبما أن } -2x + y + 5z + d = 0$$

فإن  $-2(1) + (-2) + 5(1) + d = 0$  أي  $d = -1$  وبالتالي:

$$(P): -2x + y + 5z - 1 = 0$$

احداثيات النقط التي تنتمي إلى المستويين  $(P)$  و  $(P')$  تحقق الجملة:

$$\begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = -z + 3 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ وهذه الجملة تكافئ: } \begin{cases} -2x + y + 5z - 1 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases}$$

هو تمثيل ديكارتي للمستقيم تقاطع المستويين  $(P)$  و  $(P')$ .

$$\text{باستبدال } z \text{ بوسيط } t \text{ نحصل على جملة مكافئة لها وهي: } \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 3 \\ z = t \end{cases} \text{ تدعى تمثيل}$$

وسيطي للمستقيم  $(\Delta)$

يظهر جيداً شعاع توجيهه  $\vec{u}(2;-1;1)$ ، ويمكننا التحقق بسهولة أن الاحداثيات  $(-1;4;-1)$

تحققها. أي  $C \in (\Delta)$ .

$$\text{ج) المسافة بين } A \text{ والمستوي } (P) \text{ هي: } \frac{|-10-2-5-1|}{\sqrt{4+1+25}} = \frac{3\sqrt{30}}{5} \text{ والمسافة بين } A \text{ والمستوي}$$

$$(P) \text{ هي: } \frac{|5-4-7|}{\sqrt{4+1}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

د) في المستوي الذي يشتمل النقطة A ويعامد المستويين  $(P)$  و  $(P')$ ، وتطبيق نظرية

فيتاغورس نجد:

$$\text{المسافة بين النقطة } A \text{ والمستقيم } (\Delta) \text{ تساوي } \sqrt{18} = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{30}}{5}\right)^2 + \left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2}$$

$$2. \text{ أ) } AM_t^2 = (-4+2t)^2 + (5-t)^2 + (t+1)^2 = 6(t^2 - 4t + 7)$$

وبما أن ثلاثي الحدود  $(t^2 - 4t + 7)$  موجب تماماً على  $\mathbb{R}$ . (كون مميزه سالب تماماً)

$$\text{فإن: } AM_t = \sqrt{6(t^2 - 4t + 7)} = \varphi(t)$$

## الموضوع الثاني

بكالوريا علوم تجريبية - نوفمبر 2005 -- كاليديونيا الجديدة

التمرين 1 (5 نصوص)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(\vec{v}; \vec{w}; \vec{u})$ . وحدة القياس  $3cm$ . لكل نقطة  $M$  ذات اللاحقة  $z$  نرفق بواسطة الدالة  $f$  النقطة  $M'$  ذات اللاحقة  $z'$  حيث:

$$z' = \frac{(3+4i)z + 5\bar{z}}{6}$$

نعتبر النقط  $A, B, C$  ذات اللاحق على الترتيب  $z_A = 1+2i, z_B = 1, z_C = 3i$  و  $C', B', A'$  صور النقط  $A, B, C$  على الترتيب بواسطة الدالة  $f$ .

عَلِّم النقط  $A, B, C, A', B', C'$ .

2. نضع:  $z = x + iy$  (حيث  $x, y$  عددا حقيقيان).

عَيِّن الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد  $z'$  بدلالة  $x$  و  $y$ .

3. بَيِّن أن مجموعة النقط الصامدة في التحويل  $f$  هي المستقيم  $(D)$  الذي معادلته  $y = \frac{1}{2}x$ .

ارسم  $(D)$ . ماذا يمكن أن تلاحظ؟

4. لتكن  $M$  نقطة كيفية من المستوي و  $M'$  صورتها بالتحويل النقطي  $f$ . بَيِّن أن

النقطة  $M'$  تنتمي إلى المستقيم  $(D)$ .

5. أ- بَيِّن أنه من أجل كل عدد مركب  $z$ : لدينا  $\frac{z' - \bar{z}}{z_A} = \frac{z + \bar{z}}{6} + i \frac{z - \bar{z}}{3}$

أستنتج أن العدد  $\frac{z' - \bar{z}}{z_A}$  حقيقي.

ب- أستنتج أنه إذا كانت  $M' \neq M$  فإن المستقيمان  $(OA)$  و  $(MM')$  متوازيان.

6. لتكن  $N$  نقطة كيفية من المستوي. كيف ننشئ صورتها  $N'$  بالتحويل  $f$ ؟ (بدرس حالتين:

$(N \notin (D), N \in (D))$ . ضع رسما لهذا الانشاء.

ب) الدالة  $\varphi$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $R$  ولدينا:  $\varphi'(t) = \frac{6(t-2)}{\sqrt{6t^2 - 4t + 7}}$  له إشارة البسط.

إذا: الدالة  $\varphi$  متناقصة تماما على  $]-\infty; 2]$  و متزايدة تماما على  $[2; +\infty[$ . وبالتالي  $\varphi$  تقبل قيمة حدية صغرى عند  $2$  وهي:  $\varphi(2) = \sqrt{18}$ .

واضح أن  $M_1$  نقطة كيفية من  $(\Delta)$ . و الطول  $AM_1$  يمثل البعد بين النقطة  $A$  و نقطة كيفية من  $(\Delta)$ . أصغر قيمة لهذا البعد هو القيمة الحدية الصغرى للدالة  $\varphi$  وهي  $\sqrt{18}$  وتمثل هندسيا المسافة بين النقطة  $A$  والمستقيم  $(\Delta)$ .

التمرين 4 (3 نقط)

الجزء A

نضع  $(\Omega; p)$  فضاء احتمالي منته.

1. نرسم شجرة الاحتمالات فنحصل على:  $p(E) = \frac{Card(E)}{Card(\Omega)} = \frac{1}{16}$  و

$$p(F) = \frac{Card(F)}{Card(\Omega)} = \frac{1+1+4}{16} = \frac{3}{8}$$

$$p_F(E) = \frac{p(E \cap F)}{p(F)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{6}$$

2. نعتبر تجربة برنولي ذات المخرجين  $F$  و  $\bar{F}$  وليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي قيمته هي عدد المرات التي يسهر فيها المخرج  $F$ . قانون الاحتمال للمغير  $X$  يتبع قانون ثنائي الأخذ وسيطاه  $10$  و  $\frac{3}{8}$ .

$$p(X \geq 2) = 1 - [p(X=0) + p(X=1)]$$

$$= 1 - \left[ C_{10}^0 \left(\frac{3}{8}\right)^0 \left(1 - \frac{3}{8}\right)^{10} + C_{10}^1 \left(\frac{3}{8}\right)^1 \left(1 - \frac{3}{8}\right)^9 \right] = 0.936$$

لدينا:

تاليتان العدديتان  $(u_n)$  و  $(v_n)$  المعرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$

$$u_1 = 1 \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n} \\ v_n = u_n - \ln n \end{cases} \quad n \geq 2$$

أ- أحسب  $u_2, u_3, u_4$ .

ب- نبي أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  :  $u_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

$$1 - \text{نبي أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم } k : \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k}$$

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  أكبر من أو يساوي 2، لدينا:

$$0 \leq v_n \leq 1 \quad \text{و} \quad u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \frac{1}{n}$$

$$3 - \text{أ- نبي أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n : v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}$$

ب- استنتج اتجاه تغير المتتالية  $(v_n)$ .

4- بين أن المتتالية  $(v_n)$  تقارب. برمز  $\gamma$  لنهايتها (لا يطلب حساب  $\gamma$ ).

ما هي نهاية المتتالية  $(u_n)$ ؟

3 (5 نقط)

لنمرين يظل حزنين مستقلين. الجزء 1 هو برهان لنسبة  $\gamma$  بالدرج II هو أسئلة

دالة الاختيارات.

جزء 1

$A$  و  $B$  حادثتان مستقلتان. بين أن الحادثتان  $A$  و  $\bar{B}$  مستقلتان.

جزء II

لل سؤال من الأسئلة التالية، هناك جواب واحد صحيح فقط.

شع يضع على ورقة الإجابة رقم السؤال والحرف الموافق للجواب الذي يراه صحيحا.

يطلب أي تعليل

في حالة الإجابة صحيحة يحصل المترشح على 1. وفي حالة الإجابة غير الصحيحة يحصل المترشح على 0.5 - . وإذا كانت مجموع علامات هذا الجزء عدد سالب فيحصل المترشح على 0 في الجزء II.

1. يحوي صندوق خمس كرات سوداء وثلاثة كرات حمراء لا تميز بينها في اللمس.

نسحب في آن واحد ثلاثة كرات من الصندوق. ما احتمال الحصول على كرتين سوداء وكرة حمراء؟

$$(أ) : \frac{75}{512} \quad , \quad (ب) : \frac{13}{56} \quad , \quad (ج) : \frac{15}{64} \quad , \quad (د) : \frac{15}{28}$$

2. في ربة الأنفلونزا، قدم التطعيم لثلث السكان. شخص واحد استفاد من التطعيم من بين كل عشرة مصابين.

احتمال أن يختار شخص عشوائيا من بين السكان فيكون من المصابين هو 0.25.

ما احتمال أن يكون شخص من بين السكان الخاضعين للتطعيم مصاب.

$$(أ) : \frac{1}{120} \quad , \quad (ب) : \frac{3}{40} \quad , \quad (ج) : \frac{1}{12} \quad , \quad (د) : \frac{4}{40}$$

3. ألقى لاعباً مرة واحدة نرداً متوازناً.

يربح 10 دج إذا ظهر الوجه 1. يربح 1 دج إذا ظهر الوجه 2 أو 4. لا يربح أي شيء في الحالات الأخرى.

ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يساوي أرباح اللاعب. ما هو تباين  $X$ ؟

$$(أ) : 2 \quad , \quad (ب) : 13 \quad , \quad (ج) : 16 \quad , \quad (د) : 17$$

4. مدة انتظار  $T$  بالدقيقة، في نقطة استخلاص بالطريق السيارة قبل المرور بشباك التذاكر،

تعيّن المتغير العشوائي الذي يتبع القانون الأسّي وسيطه  $\lambda = \frac{1}{6}$ .

$$\text{أي من أجل كل عدد حقيقي } t > 0 : p(T < t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$$

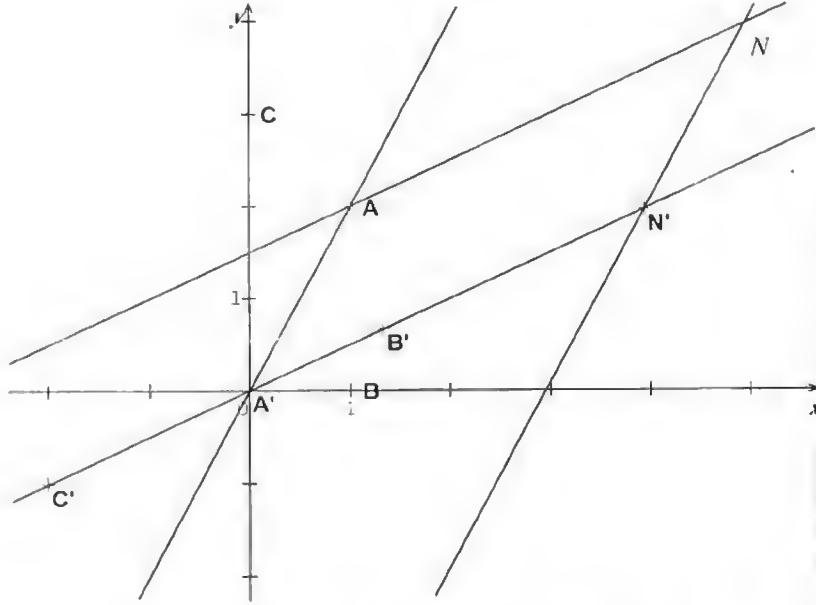
معبر عنه بالدقيقة.

علما أن صاحب سيارة وقف ينتظر لمدة دقيقتين، ما احتمال (يدور إلى  $10^{-4}$ ) أن يكون وقت انتظاره

الاجمالي أقل من خمس دقائق؟

$$(أ) : 0.2819 \quad , \quad (ب) : 0.3935 \quad , \quad (ج) : 0.5654 \quad , \quad (د) : 0.6065$$

$$z_C = 3i, z_B = 1, z_{B'} = \frac{(3+4i)+5}{6} = \frac{4+2i}{3}, z_{C'} = \frac{3i(3+4i)-15i}{6} = -2-i$$



2.  $z = x + iy$  (حيث  $x$  و  $y$  عددين حقيقيين).

$$z' = \frac{(3+4i)(x+iy)+5(x-iy)}{6} = \frac{3x-4y+5x}{6} + i \frac{4x+3y-5y}{6}$$

إذا:  $\text{Im}(z') = \frac{2x-y}{3}$  و  $\text{Re}(z') = \frac{4x-2y}{3}$

3.  $M(z)$  صامدة في التحويل  $f$  يكافئ  $f(M) = M$  أي  $z' = z$

$$y = \frac{1}{2}x \text{ يكافئ } \begin{cases} x = \frac{4x-2y}{3} \\ y = \frac{2x-y}{3} \end{cases} \text{ يكافئ}$$

إذا: مجموعة النقط الصامدة في التحويل  $f$  هي المستقيم  $(D)$  الذي معادلته  $y = \frac{1}{2}x$ .

نلاحظ أن المستقيم  $(D)$  يظم النقط  $A', B', C'$  أي هي نقط صامدة.

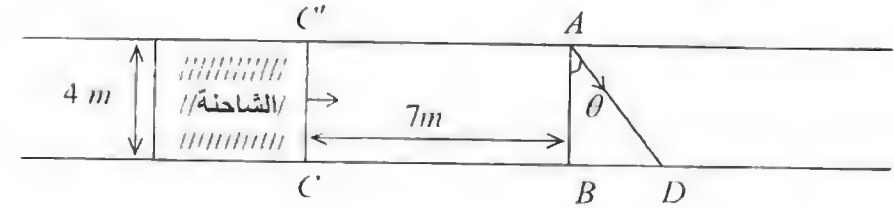
التمرين 4 (5 نقط)

أرنب يرغب في اجتياز طريق سيار عرضه  $4m$ . شاحنة تستعمل عرض الطريق كاملاً تتجه نحو الأرنب بسرعة  $60km/h$ .

الأرنب يقرر في اللحظة الأخيرة الاجتياز، و الشاحنة لا تبعد عنه سوى  $7m$ . أنطلق الأرنب كالسهم، ونفرض أنه يجتاز الطريق في خط مستقيم وفي أقصى سرعته، أي  $30km/h$ .

مقدمة الشاحنة ممثلة بالقطعة المستقيمة  $[C'C'']$  في الرسم أدناه، والأرنب ينطلق من النقطة  $A$  في

اتجاه النقطة  $D$ . هذا الاتجاه يعلم بالزاوية  $\theta = \widehat{BAD}$  حيث:  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$  (بالراديان).



1. عيّن المسافتين  $AD$  و  $CD$  بدلالة  $\theta$ ، والزمنين  $t_1$  و  $t_2$  المنحيزين من طرف الأرنب والشاحنة على الترتيب لقطع على الترتيب المسافتين  $AD$  و  $CD$ .

2. نضع:  $f(\theta) = \frac{7}{2} + 2 \tan \theta - \frac{4}{\cos \theta}$ .

يبين أن الأرنب يجتاز الطريق قبل وصول الشاحنة إذا وفقط إذا كان  $f(\theta) > 0$ .

3. استنتج.

### تصحيح الموضوع الثاني

بكالوريا علوم تجريبية -- نوفمبر 2005 -- كالدونيا الجديدة

التمرين 1 (5نقط) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

$$f(M_z) = M'_z \text{ يكافئ } z' = \frac{(3+4i)z+5\bar{z}}{6}$$

1.  $z_A = 1+2i$

$$z_{A'} = \frac{(3+4i)(1+2i)+5(1-2i)}{6} = \frac{3-8+5+6i+4i-10i}{6} = 0$$



$$n \geq 1 \quad u_n = u_{n-1} - \ln n \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n} \end{cases} \quad / n \geq 2$$

$$1. \quad u_3 = u_2 + \frac{1}{3} = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}, \quad u_2 = u_1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{أ.}$$

$$u_4 = u_3 + \frac{1}{4} = \frac{11}{6} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$$

$$\text{ب- نستعمل البرهان بالتراجع.} \quad u_1 = \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k} = 1 \quad \text{محقة.}$$

$$\text{نفرض أن } u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{محقة إلى الرتبة } n$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$$

$$\text{إذاً من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n: u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$2. \quad \text{أ- عدد طبيعي غير معدوم كفي.}$$

$$\text{من أجل كل } x \text{ من المجال } [k; k+1],$$

$$\text{لدينا } \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k} \quad \text{يكافئ } k \leq x \leq k+1$$

$$\text{يكافئ } \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx \quad (\text{خواص التكامل للدوال موجبة})$$

$$\text{أي } \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k}$$

$$\text{ب- نكتب العلاقة الأخيرة من أجل } k=1 \text{ ثم } k=2 \text{ ثم } \dots \text{ ثم } k=n \text{ نجد:}$$

$$\frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^n \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{n-1} \quad \text{و} \quad \frac{1}{3} \leq \int_2^3 \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \frac{1}{2} \leq \int_1^2 \frac{dx}{x} \leq 1$$

$$\text{باجمع طرف لطرف وباستعمال علاقة شال للتكاملات نجد:}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq \int_1^n \frac{dx}{x} \leq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}$$

$$\text{أي } u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \frac{1}{n}$$

$$4. \quad M(z) \text{ نقطة من المستوي و } M(x'; y') \text{ صورتها بالتحويل } f \text{ تنتمي إلى المستقيم } (D),$$

معناه احداثياتها تحقق معادلة (D).

$$\text{لدينا: } \frac{1}{2} x' = \frac{1}{2} \left( \frac{4x-2y}{3} \right) = \frac{2x-y}{3} = y' \quad \text{هذا يعني أن النقطة } M' \text{ تنتمي إلى}$$

المستقيم (D).

$$\frac{z' - z}{z_A} = \frac{(3+4i)z + 5\bar{z} - 6z}{6(1+2i)} = \frac{(-3+4i)z + 5\bar{z}}{6(1+2i)}$$

$$= \frac{(-3+4i)(1-2i)z + 5(1-2i)\bar{z}}{30} \quad \text{أ.}$$

$$= \frac{z + \bar{z}}{6} + i \frac{z - \bar{z}}{3}$$

$$\text{بما أن } \frac{z + \bar{z}}{6} = \frac{2x}{6} = \frac{x}{3} \text{ فهو عدد حقيقي و } i \frac{z - \bar{z}}{3} = i \frac{2iy}{3} = -\frac{2y}{3} \text{ فهو كذلك عدد حقيقي}$$

$$\text{إذاً: } \frac{z' - z}{z_A} = \frac{x}{3} - \frac{2y}{3} \text{ عدد حقيقي.}$$

$$\text{ب- إذا كانت } M' \neq M \text{ فإن } \frac{z' - z}{z_A} = \frac{z' - z}{z_A - z_O} \text{ هو عدد حقيقي غير معدوم}$$

عمده  $k\pi$  حيث  $k$  عدد صحيح.

$$\arg\left(\frac{z' - z}{z_A - z_O}\right) = \arg(z' - z) - \arg(z_A - z_O) + 2k\pi = (\vec{u}; \overline{MM'}) - (\vec{u}; \overline{OA}) = k\pi$$

$$\text{إذاً: } (\vec{u}; \overline{OA}) = k\pi. \text{ يعني أن المستقيمان } (OA) \text{ و } (MM') \text{ متوازيان.}$$

$$6. \text{ في حالة } N \notin (D): \text{ حسب السؤالين 4 و 5- ب فإن } N' \text{ هي النقطة المشتركة}$$

$$\text{بين المستقيم } (D) \text{ والمستقيم الذي يوازي } (OA) \text{ ويشمل } N.$$

$$\text{في حالة } N \in (D): \text{ حسب السؤال 3 فإن } N' \text{ تنطبق على } N. \text{ (الشكل)}$$

التمرين 2 (5 نقط)

نعتبر المتتاليتين العدديتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  المعرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  كما يلي:

$$\frac{C_5^2 \times C_3^1}{56}$$

وهو:  $\frac{15}{28}$  الإجابة (د).

2. من بين المصابين بالانفلونزا هناك  $x$  احتمال لشخص خضع للتطعيم، وبالتالي 9.

احتمال لم يخضعوا للتطعيم، والمجموع  $x + 9x$  يمثل احتمال اختيار شخص من

$$x = \frac{1}{40} \text{ إذا: } x + 9x = 0.25 \text{ أي: } x = \frac{1}{40}$$

احتمال شخص خضع للتطعيم من بين المصابين هو  $\frac{1}{40}$

وبالتالي احتمال أن يكون شخص من بين السكان الخاضعين للتطعيم مصاب، هو

الاحتمال الشرطي

$$p_V(G) = \frac{p(V \cap G)}{p(V)} = \frac{\frac{1}{40}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{40}$$

تعرض للتطعيم، و  $(V \cap G)$  حادثة اختيار شخص تعرض للتطعيم من بين

المصابين.

الإجابة (ب).

3. الأمل الرياضي للمتغير العشوائي  $X$  هو:

$$E(X) = \sum_{i=1}^6 x_i p_i = 10\left(\frac{1}{6}\right) + 1\left(\frac{2}{6}\right) + 0\left(\frac{3}{6}\right) = 2$$

العشوائي  $X$  و  $p_i$  يمثل احتمال  $x_i$ .

وبالتالي التباين يعطى بالدستور:

$$V(X) = \sum_{i=1}^6 (x_i - E(X))^2 p_i = \frac{1}{6}(64 + 1 + 1 + 4 + 4 + 4) = \frac{78}{6} = 13$$

4. احتمال أن يكون وقت انتظاره الإجمالي أقل من خمس دقائق علما أنه وقف

ينتظر لمدة دقيقتين. هو:

من العلاقة الأخيرة ينتج أن  $u_n - \ln n \geq \frac{1}{n}$  و  $u_n - \ln n \leq 1$

$$\frac{1}{n} \leq u_n - \ln n \leq 1$$

أي أن:  $0 \leq v_n \leq 1$  وبالمخصوص  $0 \leq v_n \leq 1$

3. أ- من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$ :

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - \ln(n+1) - u_n + \ln n = [u_{n+1} - u_n] - [\ln(n+1) - \ln n] = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}$$

ب- من الحصر المحصل عليه في السؤال الثاني نجد:  $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}$

$$\frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \leq 0$$

أي  $v_{n+1} - v_n \leq 0$  من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$ :

وبالتالي  $(v_n)$  متناقصة تماما على  $N$ .

4.  $(v_n)$  متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 فهي إذا متقاربة نحو عدد  $\gamma$

أكبر من أو يساوي 0.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n + \ln n) = \gamma + (+\infty) = +\infty$$

التمرين 3 (5 نقط)

الجزء I

$A$  و  $B$  حادثان مستقلتان، يعني أن  $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

بما أن  $p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}) = p(A)$  كون الحادثين  $(A \cap B)$  و  $(A \cap \bar{B})$

غير متلائمين

$$p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B) = p(A) - p(A) \times p(B)$$

$$= p(A)[1 - p(B)] = p(A) \times p(\bar{B})$$

يعني أن  $A$  و  $\bar{B}$  حادثان مستقلتان.

الجزء II

1. يخوي صندوق خمس كرات سوداء وثلاث كرات حمراء لا تميز بينها في اللمس.

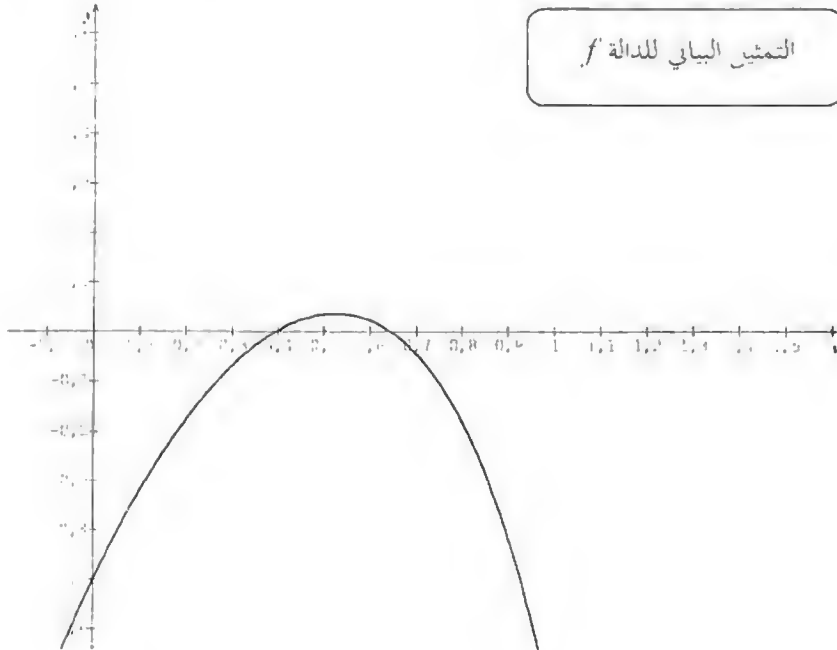
نسحب في آن واحد ثلاثة كرات من الصندوق. عدد السحبات الممكنة هو  $C_8^3 = 56$

$\theta$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$	+	0	-
$f(\theta)$	$-\frac{1}{2}$	0.03359	$-\infty$

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{7}{2} + \frac{2 \sin \theta - 4}{\cos \theta} \right) = -\infty$$

حسب الرسم، تكون  $f > 0$  عندما يكون  $0.4 < \theta < 0.64 \dots$  يعني الزاوية  $\theta$  محصورة بين 23 و 27 درجة.

التمثيل البياني للدالة  $f$ .



$$p_{(1,2)}(T < 5) = \frac{p[(T > 2) \cap (T < 5)]}{p(T > 2)} = \frac{\int_2^5 \lambda e^{-\lambda x} dx}{1 - \int_0^2 \lambda e^{-\lambda x} dx}$$

. الاحابة (ب).

$$= \frac{e^{-2} - e^{-5}}{e^{-2}} = 1 - e^{-\frac{3}{2}} \approx 0.3935$$

التمرين 4 (5 نقط)

1. المثلث  $ABD$  قائم في  $B$ . لدينا إذن:  $\cos \theta = \frac{AB}{AD}$  وبالتالي:

$$AD = \frac{AB}{\cos \theta} = \frac{4}{\cos \theta}$$

وكذلك لدينا:  $\tan \theta = \frac{BD}{AB}$  أي  $BD = AB \tan \theta = 4 \tan \theta$

$$t_2 = \frac{CD}{v_2} = \frac{0.007 + 0.004 \tan \theta}{60} \text{ و } t_1 = \frac{AD}{v_1} = \frac{0.004}{\cos \theta} \times \frac{1}{30} = \frac{0.0004}{3 \cos \theta}$$

إذا:  $f(\theta) = \frac{7}{2} + 2 \tan \theta - \frac{4}{\cos \theta}$ . الأرنب يختار الطريق قبل وصول الشاحنة إذا

و فقط إذا كان  $t_1 < t_2$

$$\frac{7}{2} \cos \theta + 2 \sin \theta - 4 > 0 \text{ يكفي } \frac{0.0004}{3 \cos \theta} < \frac{0.007 + 0.004 \tan \theta}{60} \text{ أي } f(\theta) > 0$$

3. ندرس اتجاه تغيرات الدالة  $f$ : من أجل كل  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$

$$f'(\theta) = \frac{2 - 4 \sin \theta}{\cos^2 \theta}$$

$f'(\theta)$  له إشارة العدد  $(1 - 2 \sin \theta)$ .

$$f'(\theta) = 0 \text{ يكفي } \theta = \frac{\pi}{6}. \text{ ندرس الإشارة لـ } f: \text{ متزايدة تماماً على } \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$$

ومتناقصة تماماً على  $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$

## الموضوع الثالث

بكالوريا علوم تجريبية -- ماي 2006 -- أمريكا الشمالية

التمرين 1 (5 نقط)

في كل سؤال من الأسئلة الثلاثة التالية، هناك جواب واحد صحيح من بين الاقتراحات الثلاثة. المترشح يضع على ورقة الاجابة رقم السؤال والحرف الموافق للجواب الذي يراه صحيحا. ( لا يطلب أي تعليل )

في حالة الاجابة صحيحة يحصل المترشح على 1. وفي حالة الاجابة غير الصحيحة يحصل المترشح على 0.5 - . وفي غياب الاجابة يعني 0. إذا كانت مجموع علامات هذا التمرين عدد سالب فيحصل المترشح على 0 في هذا التمرين.

يحوي صندوق 10 أضرفة غير مميزة في اللمس، مقسمة إلى ثلاثة أنواع وفق ما يلي:

4 أضرفة سجلت عليها كلمة ( نعم )، 3 أضرفة سجلت عليها كلمة ( لا ) و 3 أضرفة لم يسجل عليها أي شيء ( بيضاء ).

في اللعبة الأولى، يبدأ اللاعب بتقديم 30DA. ويسحب غلافا من الصندوق ثم يرجعه بعد قراءة ما كتب عليه.

إذا كان الضرف المسحوب مكتوب عليه ( نعم )، فإن اللاعب يتلقى 60DA وإذا كان مكتوب عليه ( لا ) فإن اللاعب لا يتلقى شيئا وإذا كان الضرف المسحوب ليس مكتوب عليه أي شيء ( أبيض ) فإن اللاعب يتلقى 20DA.

1. اللعبة :

(أ) : مربحة للاعب ، (ب) : غير مربحة للاعب ، (ج) : متعادلة الربح والخسارة

2. يقوم اللاعب بأربع جولات مستقلة عن بعضها. احتمال أن يسحب على الأقل مرة واحدة ضرفا سجل عليه ( نعم ) هو :

(أ) :  $\frac{216}{625}$  ، (ب) :  $\frac{544}{625}$  ، (ج) :  $\frac{2}{5}$

في اللعبة الثانية، يسحب اللاعب ضرفين من الصندوق في آن واحد.

3. احتمال أن يحصل على ضرفين من نوعين مختلفين :

(أ) :  $\frac{4}{15}$  ، (ب) :  $\frac{11}{30}$  ، (ج) :  $\frac{11}{15}$

التمرين 2 (5 نقط)

المستوي المركب مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . ( الوحدة 2cm )

لعتبر النقط  $A, B, C$  ذات اللاواحق على الترتيب  $z_A = 2$  ،  $z_B = 1 + i\sqrt{3}$  و  $z_C = 1 - i\sqrt{3}$ .

الجزء I

1. أ- أعط الشكل الأسى لكل من العددين  $z_B$  و  $z_C$ .

ب- ضع في رسم النقط  $A, B, C$ .

2. عيّن ضبيعة الرباعي  $OBAC$ .

3. عيّن وأنشئ المجموعة  $(D)$  للنقط  $M$  من المستوي والتي لاحتقها  $z$  تحقق:  $|z| = |z - 2|$ .

الجزء II

لكل نقطة  $M$  من المستوي ذات اللاحقة  $z$  حيث  $z \neq z_A$ ، نرفق النقطة  $M'$  من المستوي ذات

اللاحقة  $z'$  حيث  $z' = \frac{-4}{z - 2}$ .

1. أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة  $C$  المعادلة  $z = \frac{-4}{z - 2}$ .

ب- استنتج النقط المرفقة للنقطتين  $B$  و  $C$ .

ج- عيّن وأنشئ النقطة  $G'$  المرفقة لمركز ثقل المثلث  $OAB$ .

2. أ- سؤال من الدرس.

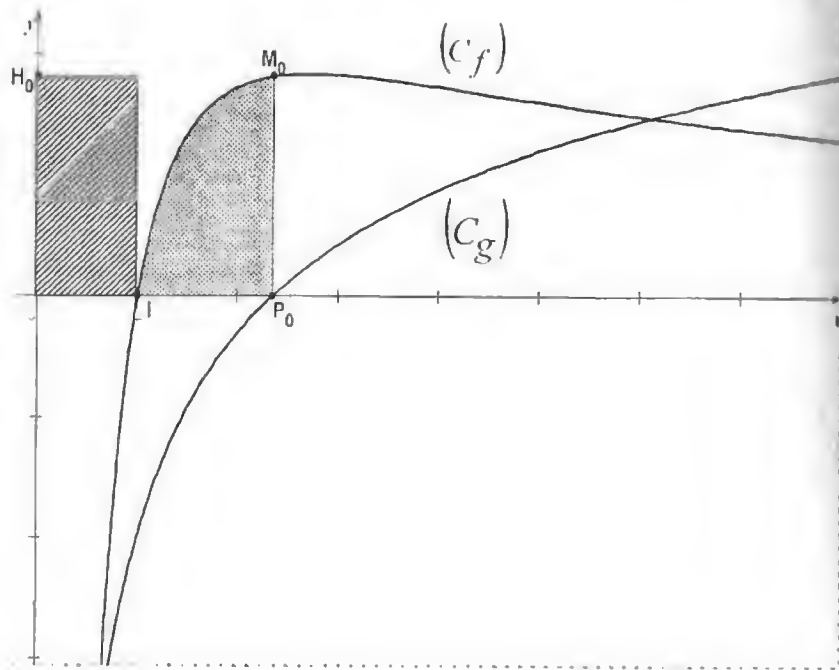
بين أن: من أجل كل عددين مركبين  $z_1$  و  $z_2$  لدينا:  $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$

ومن أجل كل عدد مركب  $z$  غير معدوم لدينا:  $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$

ب- بين أنه من أجل كل عدد مركب  $z$  يختلف عن 2،  $|z' - 2| = \frac{2|z|}{|z - 2|}$

ج- نفرض في هذا السؤال أن  $M$  نقطة كيفية من المجموعة  $(D)$ ، حيث  $(D)$  هي المجموعة المعرفة في الجزء I.

بين أن النقطة  $M'$  المرفقة للنقطة  $M$ ، تنتمي إلى دائرة  $\Gamma$  يطلب تعيين مركزها



التمرين 4 (7 نقط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتحان  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

نهتم بالدالة  $f$  انقبالة للاشتقاق على المجال  $[0; +\infty[$  والتي تحقق الشرطين:

$$(1): \text{من أجل كل } x \text{ من المجال } [0; +\infty[ , f'(x) = 4 - [f(x)]^2 ,$$

$$(2): f(0) = 0 .$$

نقبل أنه توجد دالة واحدة  $f$  تحقق الشرطين (1) و (2).

الجزءان A و B من هذا التمرين يمكن معالجتهما بطريقة مستقلة، الرسم المعطى في نهاية التمرين

يملأ ويرجع مع ورقة الإجابة.

الجزء A . دراسة متتالية

للحصول على تقريب للمنحني الممثل للدالة  $f$  نستعمل طريقة أولر بخطوة تساوي 0.2 .

نحصل إذاً على متتالية النقط نرمز لها  $(M_n)$  ، فاصلتها  $x_n$  وترتيبها  $y_n$  حيث:

$$x_0 = 0 , \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n , x_{n+1} = x_n + 0.2$$

$$\text{و } y_0 = 0 , \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n , y_{n+1} = -0.2y_n^2 + y_n + 0.8$$

ونصف قطرها. أنشئ  $\Gamma$ .

التمرين 3 (5 نقط)

1. نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بالدستور:  $g(x) = \ln x - \frac{2}{x}$

يعطى فيما يلي جدول تغيرات الدالة  $g$ .

$x$	0	2.3	$x_0$	2.4	$+\infty$
$g$	$-\infty$		0		$+\infty$

بين كل خواص الدالة  $g$  المجمعة في هذا الجدول.

2. نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بالدستور:  $f(x) = \frac{5 \ln x}{x}$

أ- بين أن  $f(x_0) = \frac{10}{2}$  حيث  $x_0$  هو العدد الذي يظهر في جدول تغيرات الدالة  $g$ .

ب- ليكن  $a$  عدد حقيقي. من أجل  $(C_f)$ ، عبّر عن  $\int_a^1 f(t) dt$  بدلالة  $a$ .

3.  $(C_f)$  و  $(C_g)$  التمثيلان البيانيان للدالتين  $f$  و  $g$  على الترتيب ممتلئين في المستوي

المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتحان  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . (الرسم معطى في نهاية التمرين)

نعتبر النقطة  $I$  ذات الإحداثيات  $(1; 0)$ ،  $P_0$  هي نقطة تقاطع المنحني  $(C_g)$  مع حامل محور

الفواصل،  $M_0$  النقطة من المنحني  $(C_f)$  والتي لها نفس فاصلة النقطة  $P_0$ ، و  $H_0$  المسقط

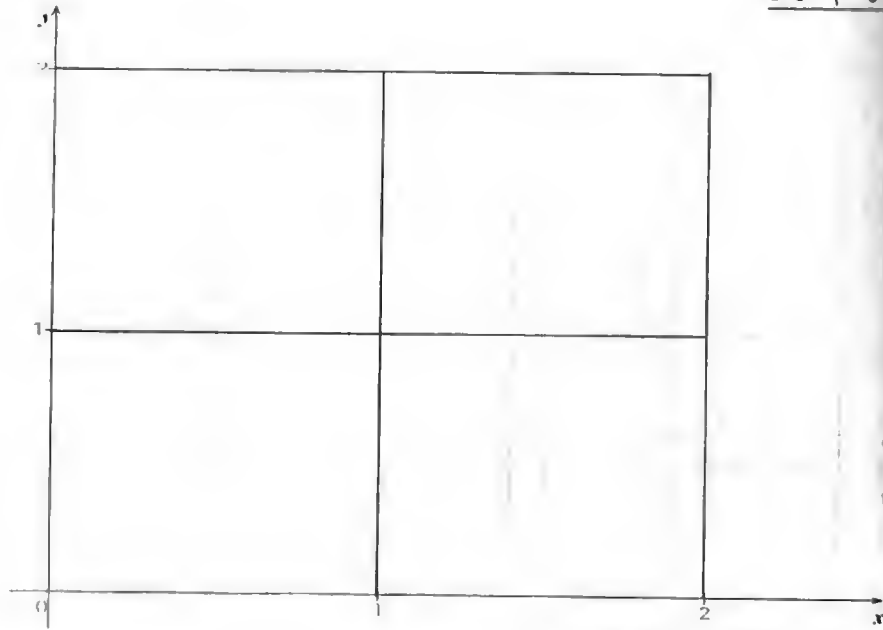
العمودي للنقطة  $M_0$  على حامل محور الترتيب.

نسمي  $(D_1)$  الحيز من المستوي المحدد بالمنحني  $(C_f)$  والقطعتين المستقيمتين  $[IP_0]$  و  $[P_0M_0]$ .

نسمي  $(D_2)$  الحيز من المستوي المحدد بالمستطيل المرسوم من القطعتين المستقيمتين  $[OI]$  و

$[OH_0]$ . بين أن للحيزين  $(D_1)$  و  $(D_2)$  نفس المساحة، ثم اعط حصراً لهذه المساحة.

الرسم المرفق



تصحيح الموضوع الثالث

بكالوريا علوم تجريبية -- ماي 2006 -- أمريكا الشمالية

التمرين 1 (5 نقاط)

- نحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي  $X$  المقترح في النص.  

$$E(X) = \frac{4}{10}(60-30) + \frac{3}{10}(0-30) + \frac{3}{10}(20-30) = 0$$
 متعادلة الربح والخسارة. الإجابة (ج).
- نضع:  $A$  حادثة " سحب على الأقل (نعم). إذا:  $\bar{A}$  حادثة " لا يسحب (نعم).  

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{6}{10}\right)^4$$
 باعتبار قانون ثنائي الحد وسيطاه  $n = 4$  و  $p = \frac{4}{10}$   
 إذا:  $p(A) = 1 - \frac{81}{625} = \frac{544}{625}$ . الإجابة (ب).
- عدد الحالات الممكنة في هذه اللعبة هو:  $Card(\Omega) = C_{10}^2 = 45$ .

- أ- احداثيات النقط الأولى محجوزة في الجدول المرفق. أكمل هذا الجدول. تُقدم النتائج بتقريب إلى  $10^{-4}$ .

ب- ضع على الرسم المعطى النقط  $M_n$  من أجل  $n \leq 7$ .

ج- حسب هذا الرسم ماهو التخمين الذي يمكننا وضعه فيما يتعلق باتجاه تغيّر المتتالية  $(y_n)$  و كذلك تقاربها.

- أ- من أجل  $x$  عدد حقيقي، نضع:  $p(x) = -0.2x^2 + x + 0.8$

بين أنه إذا كان  $x \in [0; 2]$  فإن  $p(x) \in [0; 2]$ .

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $0 \leq y_n \leq 2$ .

ج- ادرس اتجاه تغيّر المتتالية  $(y_n)$ .

د- هل المتتالية  $(y_n)$  متقاربة؟

الجزء B. دراسة دالة

$g$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $[0; +\infty[$  بالدستور:  $g(x) = 2 \left( \frac{e^{4x} - 1}{e^{4x} + 1} \right)$  و  $(C_g)$  تمثيلها البياني.

- بين أن الدالة  $g$  تحقق الشرطين (1) و (2).
- أ- بين أن المنحني  $(C_g)$  يقبل مستقيم مقارب  $\Delta$  يطلب تعيين معادلته.  
 ب- أدرس اتجاه تغيّر الدالة  $g$  على المجال  $[0; +\infty[$ .
- عين الفاصلة  $\alpha$  لنقطة تقاطع المستقيم  $\Delta$  مع المماس للمنحني  $(C_g)$  عند النقطة  $O$ .
- أرسم في العلم المعطى في الشكل، المنحني  $(C_g)$  وكذا العناصر التي ظهرت في هذا الجزء B.

الجدول المرفق

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_n$	0	0.2	0.4					
$y_n$	0	0.8000	1.4720					

(نعم) وَ (لا) أَوْ (نعم) وَ (أبيض) أَوْ (لا) وَ (أبيض)

التمرين 2 ( 5 نقط )

نعتبر النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  ذات الملامح على الترتيب  $z_A = 2$ ،  $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ ،  $z_C = 1 - i\sqrt{3}$

الجزء ١

$\cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

ب- انظر الرسم.

3.  $M(z)$  نقطة من  $(D)$  معناه  $|\bar{z}| = |\bar{z} - 2|$  أي  $OM = AM$

إذا:  $(D)$  محور القطعة المستقيمة  $[0,4]$

الجزء ۱۱

اللاحقة  $z'$  حيث  $z' = \frac{-4}{z-2}$ .

$$z = 1 - i\sqrt{3} \text{ و}$$

$$S = \{z_\beta; z_c\} : \text{إذ}$$

ب- ينتج أن  $B$  ترفق بالنقطة  $B$  نفسها، وكذلك  $C$  ترفق بالنقطة  $C$  نفسها.

ج- لاحقة النقطة  $G$  مركز ثقل المثلث  $OAB$  هي:  $\frac{1}{3}(3 + i\sqrt{3})$  :  $\frac{1}{3}(0 + z_1 + z_2) = \frac{1}{3}(3 + i\sqrt{3})$

2. أ- سؤال من الدرس.

نعلم من الدرس أن  $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ . إذا:

$$|z_1 \times z_2| = \sqrt{(z_1 \times z_2)(z_1 \times z_2)} = \sqrt{(z_1 \times z_1)(z_2 \times z_2)} = \sqrt{z_1 \times z_1} \times \sqrt{z_2 \times z_2} = |z_1| \times |z_2|$$

و من أجل كل عدد مركب  $z$  غير معدوم لدينا:  $\left| z \times \frac{1}{z} \right| = 1$  أي  $\left| \frac{1}{z} \right| \times \left| z \right| = 1$

وبالتالي:  $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$

ب- ۷ عدد مرگب کیفی یختلف عن 2،

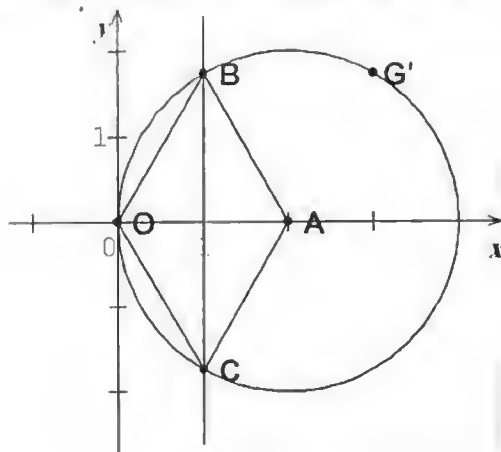
$$|z' - 2| = \left| \frac{-4}{z-2} - 2 \right| = \left| \frac{-2z}{z-2} \right| = \frac{|-2z|}{|z-2|} = \frac{2|z|}{|z-2|}$$

ج- لدينا فرضاً:  $M$  نقطة كيفية من المجموعة  $(D)$ ، معناه  $|z| = |z - 2|$

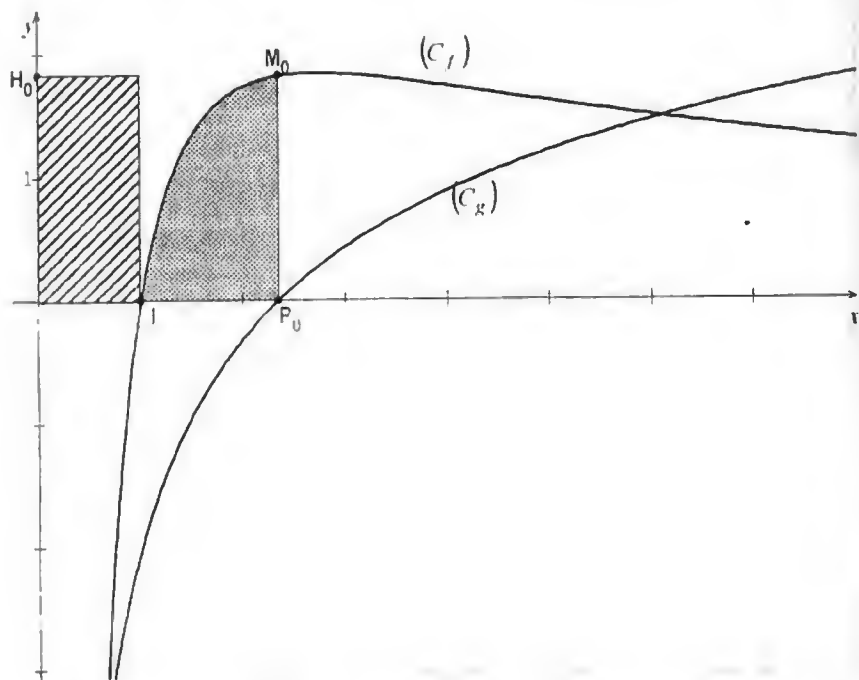
لاحظ أن النقطة  $M'$  تحقق العلاقة  $|z' - 2| = \frac{2|z|}{|z - 2|}$  أي  $|z' - 2| = \frac{2|z|}{|z|} = 2$

 $AM' = 2$  olıne

هذه الكتابة الأخيرة تعني أن  $M'$  تنتمي إلى الدائرة  $\Gamma$  التي مركزها  $A$ ، ونصف قطرها  $2$ .







لدينا فاصلة النقطة  $P_0$  هي  $x_0$ ، إذا ترتيب النقطة  $M_0$  هو  $f(x_0) = \frac{10}{x_0^2}$ .

$$\int_1^{x_0} f(t) dt = \frac{5}{2} (\ln x_0)^2$$

مساحة الحيز  $(D_1)$  هي:

$$= \frac{10}{x_0^2} = f(x_0)$$

مساحة الحيز  $(D_2)$  هي مساحة المستطيل الذي طوله  $f(x_0)$  وعرضه 1.

إذاً: للحيزين  $(D_1)$  و  $(D_2)$  نفس المساحة وهي:  $f(x_0)$ .

لدينا:  $2.3 < x_0 < 2.4$  وبالتالي:  $5.29 < x_0^2 < 5.76$  أي  $0.173 < \frac{1}{x_0^2} < 0.189$

إذاً:  $1.73 < f(x_0) < 1.89$ .

التمرين 4 (7 نقط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . نتم بالمعادلة  $f$  القابلة للاشتقاق على المجال  $[0; +\infty[$  والتي تحقق الشرطين:

1. نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بالدستور:  $g(x) = \ln x - \frac{2}{x}$ .

$x$	0	2.3	$x_0$	2.4	$+\infty$
$g$	$-\infty$		0		$+\infty$

من جدول تغيرات الدالة  $g$ ، نجد:

نهاية الدالة  $g$  عند  $0^+$  هي  $-\infty$  ذلك لأن:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{2}{x}\right) = -\infty$ .

نهاية الدالة  $g$  عند  $+\infty$  هي  $+\infty$  ذلك لأن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{x}\right) = 0^-$ .

الدالة  $g$  تقبل الاشتقاق على  $]0; +\infty[$  كمجموع دالتين، ولدينا:  $g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} > 0$ .

يعني  $g$  متزايدة تماماً على  $]0; +\infty[$ .

$g$  مستمرة ومتزايدة تماماً على  $]0; +\infty[$  وتأخذ قيمها في  $]-\infty; +\infty[$ . إذاً: الدالة  $g$  تتعدم مرة واحدة في المجال  $]0; +\infty[$  عند القيمة  $x_0$  حيث  $2.3 < x_0 < 2.4$ .

كون:  $g(2.4) \approx 0.04$  و  $g(2.3) \approx -0.04$ . (مبرهنة القيم المتوسطة)

2.  $f$  الدالة المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بالدستور:  $f(x) = \frac{5 \ln x}{x}$ .

أ- لدينا  $g(x_0) = 0$  يعني أن  $\ln x_0 = \frac{2}{x_0}$ .

$$\text{إذاً: } f(x_0) = \frac{5 \ln x_0}{x_0} = \frac{5 \cdot \frac{2}{x_0}}{x_0} = \frac{10}{x_0^2}$$

ب-  $a$  عدد حقيقي أكبر من 1. لدينا:

$$\int_1^a f(t) dt = 5 \int_1^a \frac{\ln t}{t} dt = 5 \int_1^a \frac{1}{t} \ln t dt = 5 \left[ \frac{1}{2} (\ln t)^2 \right]_1^a = \frac{5}{2} (\ln a)^2$$

باتباع الطريقة التراجعية نحصل على : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  
 $0 \leq y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n < y_{n+1} \leq 2$

يعني أن المتتالية  $(y_n)$  متزايدة تماما على  $N$  .

د- المتتالية  $(y_n)$  متزايدة تماما على  $N$  ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 ، فهي إذا متقاربة .

الجزء B . دراسة دالة

g الدالة العددية المعرفة على المجال  $[0; +\infty[$  بالدستور :  $g(x) = 2 \left( \frac{e^{4x} - 1}{e^{4x} + 1} \right)$  و  $(C_g)$  تمثيلها البياني .

1. من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $[0; +\infty[$  ،

$$g'(x) = 2 \left( \frac{4e^{4x}(e^{4x} - 1) - 4e^{4x}(e^{4x} + 1)}{(e^{4x} + 1)^2} \right) = \frac{16e^{4x}}{(e^{4x} + 1)^2}$$

$$4 - [g(x)]^2 = 4 \frac{(e^{4x} + 1)^2 - (e^{4x} - 1)^2}{(e^{4x} + 1)^2} = 4 \frac{2e^{4x} \times 2}{(e^{4x} + 1)^2} = \frac{16e^{4x}}{(e^{4x} + 1)^2}$$

ولدينا :  $4 - [g(x)]^2 = \frac{16e^{4x}}{(e^{4x} + 1)^2}$  إذا الشرط (1) محقق . ولدينا  $g(0) = 2 \frac{e^{4 \times 0} - 1}{e^{4 \times 0} + 1} = 0$  يعني أن الشرط (2) كذلك محقق .

2. أ - لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \left( \frac{e^{4x} - 1}{e^{4x} + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \left( \frac{e^{4x}(1 - e^{-4x})}{e^{4x}(1 + e^{-4x})} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \left( \frac{1 - e^{-4x}}{1 + e^{-4x}} \right) = 2$$

كون  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$

يعني أن المنحني  $(C_g)$  يقبل مستقيم مقارب  $\Delta$  معادلته  $y = 2$  بجوار  $+\infty$  .

ب- لدينا مما سبق من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $[0; +\infty[$  ،

$$g'(x) = \frac{16e^{4x}}{(e^{4x} + 1)^2} > 0 \text{ إذا الدالة } g \text{ متزايدة تماما على المجال } [0; +\infty[$$

3. معادلة المماس للمنحني  $(C_g)$  عند النقطة  $O$  هي :  $y = g'(0)x = 4x$  . يقطع

المستقيم  $\Delta$  عند النقطة ذات الإحداثيات  $\left( \frac{1}{2}; 2 \right)$  أي  $\alpha = \frac{1}{2}$  .

(1) : من أجل كل  $x$  من المجال  $[0; +\infty[$  ،  $f'(x) = 4 - [f(x)]^2$  و (2) :  $f(0) = 0$  .  
 نقبل أنه توجد دالة واحدة  $f$  تحقق الشرطين (1) و (2) .

الجزء A . دراسة متتالية

نعتبر متتالية النقط  $(M_n)$  ، فاصلتها  $x_n$  وترتيبها  $y_n$  حيث :

$$x_0 = 0 \text{ ، ومن أجل كل عدد طبيعي } n \text{ ، } x_{n+1} = x_n + 0.2$$

$$\text{و } y_0 = 0 \text{ ، ومن أجل كل عدد طبيعي } n \text{ ، } y_{n+1} = -0.2y_n^2 + y_n + 0.8$$

1. أ- نكمل الجدول بالتعويض مباشرة في العلاقتين التراجعتين الأسابقتين .

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_n$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4
$y_n$	0	0.8000	1.4720	1.8386	1.9625	1.9922	1.9984	1.9997

ب- أنظر الرسم في نهاية الحل .

ج- يظهر أن المتتالية  $(y_n)$  متزايدة ومتقاربة نحو العدد 2 .

2. أ- من أجل  $x$  عدد حقيقي ، نضع :  $p(x) = -0.2x^2 + x + 0.8$

الدالة  $p$  تقبل الاشتقاق على كامل  $R$  ولدينا :  $p'(x) = -0.4x + 1$

$p'(x) > 0$  من أجل  $x \in ]-\infty; 2.5[$  وبالاخص من أجل  $x \in [0; 2]$  .

إذا : الدالة  $p$  مستمرة ومتزايدة تماما على  $[0; 2]$  .

وبالتالي : إذا كان  $x \in [0; 2]$  فإن  $p(x) \in [p(0); p(2)]$  . وبما أن  $p(0) = 0.8$  و  $p(2) = 2$  و  $[0.8; 2] \subset [0; 2]$  . فإنه : إذا كان  $x \in [0; 2]$  فإن  $p(x) \in [0; 2]$  .

ب- نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $0 \leq y_n \leq 2$  .

لدينا  $y_0 = 0$  أي  $0 \leq y_0 \leq 2$  حقيقة .

نفرض أن  $0 \leq y_k \leq 2$  محققة إلى الرتبة  $k$  .

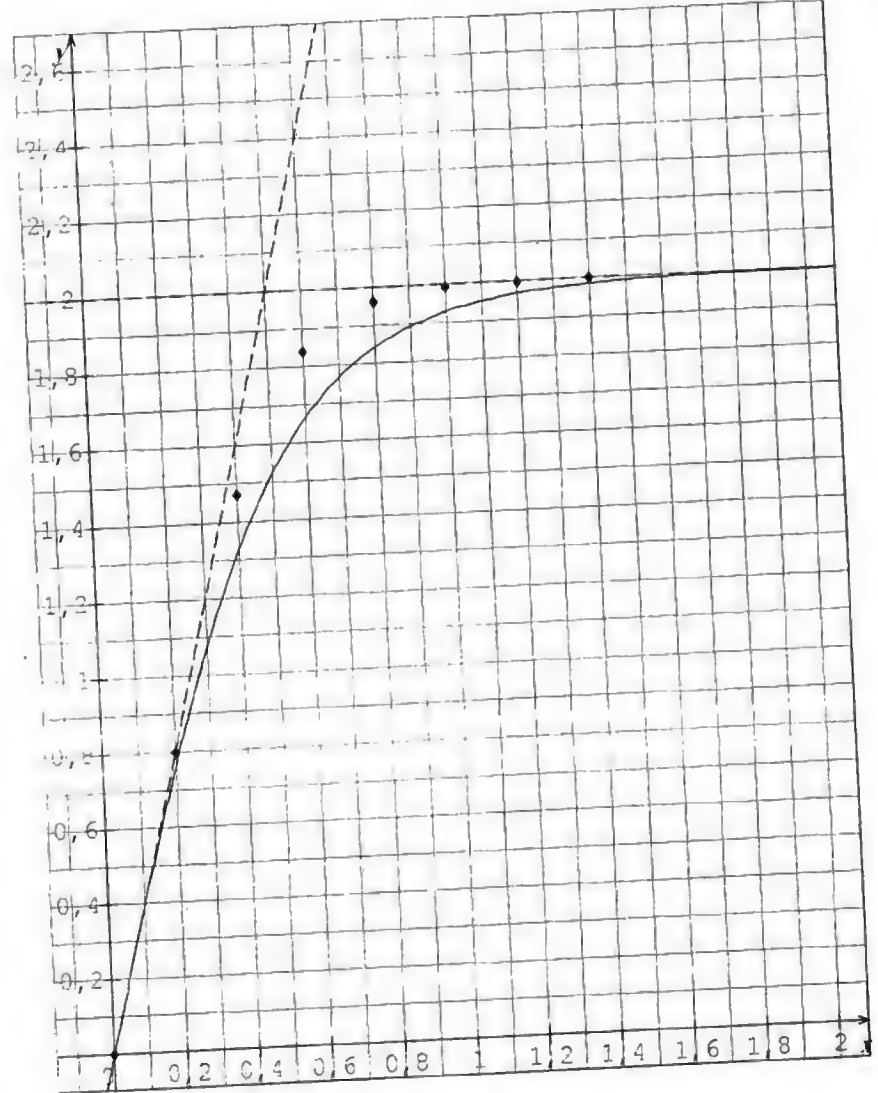
فحسب البرهان السابق وعلمنا أن  $y_{k+1} = -0.2y_k^2 + y_k + 0.8 = p(y_k)$

$$p(y_k) = -0.2y_k^2 + y_k + 0.8 = y_{k+1}$$

إذا كان  $0 \leq y_k \leq 2$  فإن  $0 \leq p(y_k) \leq 2$  وهو المطلوب .

ج- بما أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $0 \leq y_n \leq 2$  . وعلمنا أن  $y_0 = 0$  و  $y_1 = 0.8$  أي  $y_1 > y_0$

فإن  $p(y_1) > p(y_0)$  أي  $y_2 > y_1$  كون الدالة  $p$  متزايدة تماما على  $[0; 2]$  .



## الموضوع الرابع

بكالوريا علوم تجريبية -- ماي 2006 -- لبنان

التمرين 1 (5 نقط)

نعتبر النقط  $A(2;1;3)$ ،  $B(-3;-1;7)$  و  $C(3;2;4)$ .  
معلم للفضاء متعامد ومتجانس.  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

1. بين أن النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  ليست على استقامة واحدة.

2. ليكن  $(d)$  المستقيم الذي تمثله الوسيطية  $\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases}$  / عدد حقيقي.

أ) بين أن المستقيم  $(d)$  يعامد المستوي  $(ABC)$ .

ب) اعط معادلة ديكرارية للمستوي  $(ABC)$ .

3. لتكن  $H$  النقطة المشتركة بين المستقيم  $(d)$  والمستوي  $(ABC)$ .

أ) بين أن  $H$  مرجح الجملة المثقلة  $\{(A;-2); (B;-1); (C;2)\}$ .

ب) عيّن طبيعة المجموعة  $\Gamma_1$  للنقط  $M$  من الفضاء والتي تحقق:

$$(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) \cdot (-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0$$

ج) عيّن طبيعة المجموعة  $\Gamma_2$  للنقط  $M$  من الفضاء والتي تحقق:

$$\| -2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \| = \sqrt{29}$$

د) عيّن طبيعة المجموعة  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$  واذكر عناصرها المميزة.

و) هل النقطة  $S(-8;1;3)$  تنتمي إلى المجموعة  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ ؟

التمرين 2 (5 نقط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . ( نأخذ  $2cm$  كوحدة للأطوال)

نعتبر  $A$  و  $B$  النقطتين ذات اللاحقتين  $i$  و  $2$  على الترتيب.

1. أ- عيّن لاحقة النقطة  $B_1$  صورة النقطة  $B$  بالتحاكي الذي مركزه  $A$ . ونسته  $\sqrt{2}$ .

ب- عيّن لاحقة النقطة  $B'$  صورة النقطة  $B_1$  بالدوران الذي مركزه  $A$  وزاويته  $\frac{\pi}{4}$ .

2. ليكن  $f$  التحويل النقطي في المستوي، الذي يرفق بكل نقطة  $M$  ذات اللاحقة  $z$  النقطة  $M'$  ذات اللاحقة  $z'$  حيث:  $z' = (1+i)z + 1$

أ- يبين أن صورة النقطة  $B$  هي النقطة  $B'$  بالتحويل  $f$ .

ب- يبين أن  $A$  هي النقطة الصامد الوحيدة في التحويل  $f$ .

ج- تحقق أنه من أجل كل عدد مركب  $z \neq i$ ،  $\frac{z' - z}{i - z} = -i$

فسّر هذه النتيجة بمفهوم المسافات، ثم بمفهوم الزوايا.

3. أ- أعط الطبيعة والعناصر المميّزة للمجموعة  $\Sigma_1$  للنقط  $M$  من المستوي التي لاحقتها  $z$  تحقق:  $|z - 2| = \sqrt{2}$ .

ب- يبين أن:  $z' - 3 - 2i = (1+i)(z - 2)$

استنتج أنه: إذا كانت  $M$  نقطة من  $\Sigma_1$ ، فإن صورتها  $M'$  بالتحويل  $f$  تنتمي إلى دائرة  $\Sigma_2$  بطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

ج- أرسم  $\Sigma_1$  و  $\Sigma_2$  في نفس الشكل مع النقط  $A$ ،  $B$  و  $B'$ .

التمرين 3 (7 نقط)

الجزء A: دراسة دالة

$f$  الدالة العددية للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على المجال  $[0; +\infty[$  بالدستور:  $f(x) = x \ln(x+1)$   $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. أ- يبين أن الدالة  $f$  متزايدة تماماً على المجال  $[0; +\infty[$ .

ب- هل حامل محور الفواصل يمس المنحنى  $(C_f)$  عند النقطة  $O$ ؟

2. نضع:  $I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx$

أ- عيّن ثلاثة أعداد حقيقية  $a$ ،  $b$  و  $c$  بحيث: من أجل كل  $x \neq -1$ :

$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

ب- أحسب  $I$ .

3. باستعمال التكامل بالتجزئة، وكذا نتيجة السؤال 2، احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  والمستقيمت التي معادلتهما  $x=0$ ،  $x=1$  و  $y=0$ .

4. يبين أن المعادلة  $f(x) = 0.25$  تقبل حلاً واحداً في المجال  $[0;1]$ .

الجزء B: دراسة متتالية

المتتالية العددية  $(u_n)$  معرفة على  $N$  بالعلاقة  $u_n = \int_0^n x^n \ln(x+1) dx$

1. عيّن اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$ . هل المتتالية  $(u_n)$  متقاربة؟

2. يبين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$ ، لدينا  $0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$ . واستنتج نهاية

المتتالية  $(u_n)$ .

التمرين 4 (3 نقط)

مدة صلاحية آلة إلكترونية، مقدرة بالسنوات، إلى غاية حدوث أول عطل، هو معيّر عشوائي يبع

القانون الأسّي الذي وسيطه  $\lambda$  حيث  $\lambda > 0$ .

علماً أن احتمال حدوث عطل للآلة الإلكترونية قبل اللحظة  $t$ ، هو:  $p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$

1. عيّن العدد  $\lambda$  مدوّراً إلى  $10^{-1}$ ، حتى يكون  $p(X > 6) = 0.3$ .

في ما تبقى من التمرين نأخذ  $\lambda = 0.2$

2. في أية لحظة  $t$ ، يكون احتمال حدوث أول عطل للآلة الإلكترونية يساوي 0.5؟

3. يبين أن احتمال عدم تعرّض الآلة الإلكترونية للعطل خلال السنتين الأوليتين للإستعمال هو  $e^{-0.4}$ .

4. علماً أن الآلة لم تتعرّض للعطل خلال السنتين الأوليتين، ما هو احتمال أن لا يتعرّض لأي

عطل إلى غاية نهاية الستة أعوام الأولى؟

5. نعتبر مجموعة ذات 10 آلات الكترونية تعمل بطريقة مستقلة.

احسب احتمال أن يكون ضمن هذه المجموعة من الآلات، على الأقل آلة لم تتعرض للعطل خلال

السنتين الأوليتين.

$$i \in (d) \text{ يكافئ } \begin{cases} -5 = -7 + 2i \\ -3 = -3i \\ 5 = 4 + i \end{cases} \text{ لدينا من جهة أخرى}$$

وبما أن  $(d)$  عمودي على  $(ABC)$ ، فيقطعه في نقطة واحدة. وبالتالي  $H = G$ .

ب)  $M$  نقطة من الفضاء.  $M \in \Gamma_1$  معناه  $(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$   
يكافئ  $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$

$\Gamma_1$  هي المستوي الذي يشمل النقطة  $H$  وشعاعه الناظم  $\overrightarrow{CB}$ .

ج)  $M$  نقطة من الفضاء.  $M \in \Gamma_2$  معناه  $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \sqrt{29}$

يكافئ  $\|\overrightarrow{MH}\| = \sqrt{29}$

$\Gamma_2$  هي سطح الكرة التي مركزها  $H$  ونصف قطرها  $\sqrt{29}$ .

د) بما أن  $\Gamma_2$  هي سطح الكرة التي مركزها  $H$ ،  $\Gamma_1$  هي المستوي الذي يشمل

النقطة  $H$  فإن  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$  هي الدائرة التي مركزها  $H$  ونصف قطرها  $\sqrt{29}$ .

و) لدينا:  $\overrightarrow{SH}(3; -4; 2)$  و  $\overrightarrow{CB}(-6; -3; 3)$

وبما أن  $\overrightarrow{SH} \cdot \overrightarrow{CB} = -18 + 12 + 6 = 0$  فإن  $S \in \Gamma_1$

وبما أن  $\|\overrightarrow{SH}\| = \sqrt{29}$  فإن  $S \in \Gamma_2$

من كل هذا ينتج أن  $S \in (\Gamma_1 \cap \Gamma_2)$ .

التمرين 2 (5نقط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

أ-  $B_1(z_1)$  صورة النقطة  $B(2)$  بالتحاكي الذي مركزه  $A(i)$  ونسبته  $\sqrt{2}$

معناه  $z_1 - i = \sqrt{2}(2 - i)$  أي  $z_1 = 2\sqrt{2} + i(1 - \sqrt{2})$

ب-  $B'(z')$  صورة النقطة  $B_1(z_1)$  بالدوران الذي مركزه  $A(i)$  وزاويته  $\frac{\pi}{4}$ .

معناه  $z' - i = e^{i\frac{\pi}{4}}(2\sqrt{2} + i(1 - \sqrt{2}) - i)$

أي  $z' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)(2\sqrt{2} + i(1 - \sqrt{2})) + i$  أي  $z' = 3 + 2i$

## تصحيح الموضوع الرابع

بكالوريا علوم تجريبية -- ماي 2006 -- لبنان

التمرين 1 (5نقط)

$O(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم للفضاء متعامد ومتجانس. نعتبر المستقيم  $A(2; 1; 3)$  و  $B(-3; -1; 1)$  و  $C(3; 2; 4)$ .

أ. لدينا  $\overrightarrow{AB}(-5; -2; 4)$  و  $\overrightarrow{AC}(1; 1; 1)$  نفرض وجود عدد  $k$  بحيث  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

$$\begin{cases} k = -5 \\ k = -2 \\ k = 4 \end{cases} \text{ نحصل على تناقض.}$$

منه الشعاعان  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$  غير مرتبطين خطياً. يعني أن النقط  $A, B$  و  $C$  ليست على استقامة واحدة.

2. شعاع توجيه المستقيم  $(d)$  هو  $\vec{u}(2; -3; 1)$  (هي معاملات  $t$  في عبارة التمثيل الوسيطية)

ولدينا:  $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = -5(2) - 2(-3) + 4(1) = 0$  و  $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{u} = 1(2) + 1(-3) + 1(1) = 0$

يعني أن الشعاع  $\vec{u}$  يعامد مستقيمان متقاطعان  $(AB)$  و  $(AC)$  من المستوي  $(ABC)$ .

إذاً:  $\vec{u}$  يعامد  $(ABC)$ .

ب - بما سبق لدينا  $\vec{u}$  شعاع ناظم على المستوي  $(ABC)$ . وبذلك يكون المستوي  $(ABC)$  هو:  $2x - 3y + z + d = 0$ .

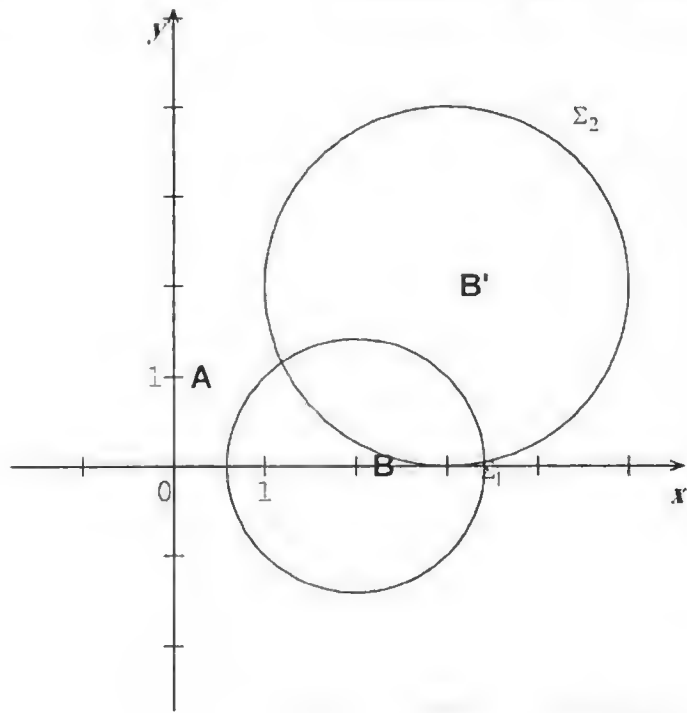
علماً أن  $A$  نقطة من  $(ABC)$  ينتج:  $2(2) - 3(1) + 3 + d = 0$  أي  $d = -4$

منه  $(ABC): 2x - 3y + z - 4 = 0$ .

3. نضع:  $G = \{(A; -2); (B; -1); (C; 2)\}$  لدينا  $G$  نقطة من المستوي  $(ABC)$  وضحاً.

نوجد احداثيات  $G$  ونبين أنها تنتمي إلى  $(d)$ .

لدينا:  $x_G = \frac{-2(2) - 1(-3) + 2(3)}{-2 - 1 + 2} = -5$  و  $y_G = \frac{-2(1) - 1(-1) + 2(2)}{-2 - 1 + 2} = -3$   
إذاً:  $G(-5; -3; 5)$  و  $z_G = \frac{-2(3) - 1(7) + 2(4)}{-2 - 1 + 2} = 5$



التمرين 3 (2.5 نقط)

الجزء A : دراسة دالة

$f$  الدالة العددية للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على المجال  $[0; +\infty[$  بالدستور:  $f(x) = x \ln(x+1)$

1. أ-  $f$  تقبل الاشتقاق على  $[0; +\infty[$  ولديها:

$$f'(x) = (x)' \ln(x+1) + x(\ln(x+1))' = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$$

من أجل كل  $x$  من  $[0; +\infty[$ ،  $\ln(x+1) \geq 0$  و  $\frac{x}{x+1} \geq 0$  منه  $f'(x) \geq 0$  على كامل

المجال  $[0; +\infty[$ . أي  $f$  متزايدة غاما على  $[0; +\infty[$ .

ب- لدينا  $f(0) = 0$  و  $f'(0) = 0$  إذا  $y = 0$  هي معادلة المماس للمحن عند  $O$  وهي محور المواصل.

2. أ- من أجل كل  $x \neq -1$ :

$$x^2 = (ax+b)(x+1) + c \quad \text{تكافئ} \quad \frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

أي  $x^2 = ax^2 + (a+b)x + b + c$  بالمطابقة نجد:  $a = 1$  و  $b = -1$  و  $c = 1$

1. أ- لدينا  $f(M) = M'$  معناه  $z' = (1+i)z + 1$

إذا:  $f(B) = M'$  يكافئ  $z' = (1+i)(2) + 1 = 2i + 3$

وبالتالي:  $M' = B'$

ب-  $M$  صامدة في التحويل  $f$  يكافئ  $f(M) = M$  أي  $z = (1+i)z + 1$

يكافئ  $z = i$

إذا: النقطة الصامدة الوحيدة في التحويل  $f$  هي:  $A$ .

ج- من أجل كل عدد مركب  $z \neq i$ ,

$$\frac{z' - z}{i - z} = \frac{(1+i)z + 1 - z}{i - z} = \frac{iz + 1}{i - z} = \frac{-i(i - z)}{i - z} = -i$$

التفسير بمفهوم المسافات: لدينا  $\left\| \frac{z' - z}{i - z} \right\| = \frac{MM'}{MA}$  أي  $\| -i \| = \frac{MM'}{MA}$

$$\frac{MM'}{MA} = 1 \quad \text{أي} \quad MM' = MA$$

$M'$  نقطة من الدائرة التي مركزها  $M$  ونصف قطرها  $MA$ .

التفسير بمفهوم الزوايا: لدينا  $\arg\left(\frac{z' - z}{i - z}\right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

يعني كذلك أن  $M'$  نقطة من الدائرة التي مركزها  $M$  ونصف قطرها  $MA$ .

$$\arg\left(\frac{MA}{MM'}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{حيث } k \text{ عدد صحيح.}$$

2. أ-  $M$  نقطة من المستوي التي لاحقتها  $z$  تحقق:  $|z - 2| = \sqrt{2}$

يعني أن  $BM = \sqrt{2}$ . إذا:  $\Sigma_1$  الدائرة التي مركزها  $B$  ونصف قطرها  $\sqrt{2}$ .

$$z' - 3 - 2i = (1+i)z + 1 - 3 - 2i$$

$$= (1+i)z - 2(1+i) \quad \text{ب-}$$

$$= (1+i)(z - 2)$$

$$\text{ينتج أن } |z' - 3 - 2i| = |(1+i)(z - 2)| = \sqrt{2}|z - 2|.$$

إذا: إذا كانت  $M$  نقطة من  $\Sigma_1$ ، فإن  $|z' - 3 - 2i| = \sqrt{2}|z - 2| = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$

وبالتالي صورتها  $M'$  بالتحويل  $f$  تنتمي إلى الدائرة  $\Sigma_2$  التي مركزها  $B'$  ونصف قطرها 2.

( كون  $\int_0^1 x^n \ln(x+1) dx \geq 0$  ) فإن  $(u_n)$  متقاربة.

2. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$ ، و من أجل كل  $x$  من  $[0;1]$ ،  $0 \leq \ln(x+1) \leq \ln 2$ ،

وكذلك  $0 \leq \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx \leq \int_0^1 x^n \ln(2) dx$ . ينتج أن:  $0 \leq x^n \ln(x+1) \leq x^n \ln 2$

$$0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n+1} \quad \text{أي} \quad 0 \leq u_n \leq \left[ \frac{\ln(2)}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \quad \text{فحسب مبرهنة الحصر ينتج أن} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n+1} \right) = 0$$

التمرين 4 ( 3 نقط )

نسمي  $(\Omega; p)$  فضاء احتمالي منته.

1. احتمال حدوث عطل لألة إلكترونية قبل اللحظة  $t$ ، هو  $\lambda e^{-\lambda t}$ ،  $P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda t}$

$$1 - (1 - e^{-6\lambda}) = 0.3 \quad \text{يكافئ} \quad 1 - p(X \leq 6) = 0.3 \quad \text{يكافئ} \quad p(X > 6) = 0.3$$

$$\lambda = -\frac{\ln(0.3)}{6} \approx 0.2 \quad \text{يكافئ} \quad -6\lambda = \ln(0.3) \quad \text{يكافئ} \quad e^{-6\lambda} = 0.3$$

2. اللحظة  $t$  التي يكون احتمال حدوث أول عطل للألة الإلكترونية يساوي 0.5 تحقق:

$$1 - e^{-\lambda t} = 0.5 \quad \text{أي} \quad p(X \leq t) = 0.5 \quad \text{أي} \quad 1 - e^{-\lambda t} = 0.5 \quad \text{يكافئ} \quad t = -\frac{\ln(0.5)}{0.2} \approx 3.5 \quad (\text{سنة})$$

3. احتمال عدم تعرض الآلة الإلكترونية للعطل خلال السنتين الأوليتين للإستعمال هو  $p(X > 2)$ .

$$p(X > 2) = 1 - p(X \leq 2) = 1 - (1 - e^{-2(0.2)}) = e^{-0.4}$$

4. احتمال أن لا يتعرض الجهاز لأي عطل إلى غاية نهاية الستة أعوام الأولى، علما أن الآلة لم

$$p(X > 6) = \frac{1 - p(X \leq 6)}{e^{-0.4}} = \frac{e^{-1.2}}{e^{-0.4}} = e^{-0.8}$$

5. نعتبر مجموعة ذات 10 آلات الكترونية تعمل بطريقة مستقلة.

احتمال أن يكون ضمن هذه المجموعة من الآلات، على الأقل آلة لم تتعرض للعطل خلال السنتين الأوليتين هو:

$$1 - [p(X \leq 2)]^{10} \quad \text{حيث} \quad [p(X \leq 2)]^{10} \quad \text{هو احتمال الآلات العشر تعرضت للعطل خلال}$$

$$\text{السنتين الأوليتين. ولدنيا:} \quad 1 - [1 - p(X > 2)]^{10} = 1 - [1 - e^{-0.4}]^{10}$$

$$\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1} \quad : x \neq -1$$

$$I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx = \int_0^1 \left( x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = \left[ \frac{1}{2} x^2 - x + \ln(x+1) \right]_0^1 = -\frac{1}{2} + \ln 2$$

3. الدالة  $f$  موجبة في المجال  $[0; +\infty[$ .  $(C_f)$  فوق محاور الفواصل كون  $\ln(x+1) \geq 0$  و  $x \geq 0$

إذاً الحيز المستوي هو مجموعة النقط  $M(x, y)$  من المستوي حيث:  $0 \leq x \leq 1$  و  $0 \leq y \leq f(x)$

مساحته هي:  $(u, a) \int_0^1 f(x) dx$

$$\text{نضع:} \quad \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x+1} \\ v'(x) = \frac{1}{2} x^2 \end{cases} \quad \text{ينتج أن} \quad \begin{cases} u(x) = \ln(x+1) \\ v(x) = x \end{cases}$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \left[ \frac{1}{2} x^2 \ln(x+1) \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} I = \frac{1}{4}$$

وبالتالي:  $\frac{1}{4} (u, a)$  المساحة المطلوبة هي:

4. بما أن الدالة  $f$  مستمرة و متزايدة تماماً بالخصوص على  $[0;1]$  وتأخذ قيمها في

المجال  $[f(0); f(1)] = [0; \ln 2]$  ( $\ln 2 \approx 0.6$ ) فإن المعادلة  $f'(x) = 0.25$  تقبل حلاً واحداً في المجال  $[0;1]$ .

الجزء B : دراسة متتالية

المتتالية العددية  $(u_n)$  معرفة على  $N$  بالعلاقة  $u_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx$

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 x^{n+1} \ln(x+1) dx - \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx = \int_0^1 x^n (x-1) \ln(x+1) dx$$

لدينا في المجال  $[0;1]$ :  $x^n \geq 0$  و  $\ln(x+1) \geq 0$  و  $(x-1) \leq 0$ .

وبالتالي:  $x^n (x-1) \ln(x+1) \leq 0$

إذاً:  $\int_0^1 x^n (x-1) \ln(x+1) dx \leq 0$  أي  $(u_n)$  متناقصة تماماً على  $N$ .

بما أن  $(u_n)$  متناقصة تماماً على  $N$  ومحدودة من الأسفل بالعدد 0



## الموضوع الخامس

بكالوريا علوم تجريبية -- جوان 2006 -- غويانا الفرنسية

التمرين 1 (3 نقط)

1. مراجعة مفاهيم في الدرس

الدالة لوغاريتم نيبيري قابلة للاشتقاق على المجال  $]0; +\infty[$ ، ودالتها المشتقة هي الدالة مقلوب $(x \mapsto \frac{1}{x})$ . لدينا:  $\ln 1 = 0$ .بين أنه من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماماً  $a$  و  $x$ ،  $\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$ .2. استعمل النتيجة السابقة للرهان على أن:  $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$  وأن $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$  من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماماً  $a$  و  $b$ .3. يعطى:  $0.69 \leq \ln 2 \leq 0.70$  و  $1.09 \leq \ln 3 \leq 1.10$ .استنتج حصراً لكل من الأعداد:  $\ln 6$ ،  $\ln\left(\frac{1}{6}\right)$ ،  $\ln\left(\frac{3}{8}\right)$ .

التمرين 2 (3 نقط)

في كل سؤال من الأسئلة التالية، هناك جواب واحد صحيح وواحد فقط.

المرشح يضع على ورقة الإجابة رقم السؤال والحرف الموافق للجواب الذي يراه صحيحاً.

(لا يطلب أي تعليل)

في حالة الإجابة صحيحة يحصل المرشح على 0.75. وفي حالة الإجابة غير الصحيحة يحصل

المرشح على -0.25. وفي غياب الإجابة يعني 0. إذا كانت مجموع علامات هذا التمرين عدد

سالب فيحصل المرشح على 0.

1. عدد حلول المعادلة  $e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$  في  $R$  هي:

-أ-	-ب-	-ج-	-د-
0 حل	حل واحد	حليين متمايزين	أكثر من حليين

2. العبارة  $e^{-x}$  -

-أ-	-ب-	-ج-	-د-
موجبة تماماً	دوماً سالبة	سالبة فقط في حالة $x$ موجب.	سالبة فقط في حالة $x$ سالب.

3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2e^x - 1}{e^x + 2} \right)$  تساوي:

-أ-	-ب-	-ج-	-د-
$-\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$

4. مجموعة حلول المعادلة التفاضلية  $1 - 2y' = 0$  هي:

-أ-	-ب-	-ج-	-د-
$x \mapsto ke^{2x} - 1$	$x \mapsto ke^{2x} + 1$	$x \mapsto ke^{2x} - 1$	$x \mapsto ke^{2x} + \frac{1}{2}$
حيث: $k \in R$	حيث: $k \in R$	حيث: $k \in R$	حيث: $k \in R$

التمرين 3 (5 نقط)

الجزء A

نعتبر المتغير العشوائي المستمر  $X$  الذي يتبع القانون الأسّي ذو الوسيط  $\lambda$ . نذكر أن:

$$p(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt$$

الشكل المعطى في نهاية التمرين يمثل دالة الكثافة المرفقة بالقانون الأسّي.

1. فسّر على الرسم الاحتمال  $p(X \leq 1)$ .2. عيّن على الرسم أين يقرأ مباشرة الوسيط  $\lambda$ .

الجزء B

نضع:  $\lambda = 1.5$ .1. احسب  $p(X \leq 1)$ ، تعطى القيمة المطلوبة ثم قيمة مقربة بالزيادة إلى  $10^{-3}$ .2. احسب  $p(X \geq 2)$ .3. استنتج من الحسابات السابقة المساواة التالية:  $p(1 \leq X \leq 2) = 0.173\dots$ .4. احسب التكامل  $F(x) = \int_0^x 1.5te^{-1.5t} dt$ .

عَيِّن نهاية العدد  $F(x)$  عندما ينتهي  $x$  إلى  $+\infty$ . ثم تعرّف على الأمل الرياضي للمتغير العشوائي  $X$ .

الجزء ٢

آلة تصنع اسطوانات . نقيس الانحراف ( بعشر المليمتر ) بين قطر الاسطوانات وقيمة تعديّل الآلة .  
نفرض ان هذا الانحراف يتبع القانون الأسّي ذو الوسيط  $\lambda = 1.5$  .  
إذا كان الانحراف أقل من 1، فإن الاسطوانة مقبولة . إذا كان الانحراف محصور بين 1 و 2، نقوم بتعديل يسمح بقبول الاسطوانات بنسبة 80% من الحالات . إذا كان الانحراف أكبر من 2 فإن الاسطوانة مرفوضة .

1. نأخذ عشوائيا اسطوانة واحدة من المنتج .

أ- بيّن أن احتمال أن تكون مقبولة يساوي 0.915 مقرب إلى  $10^{-3}$  .

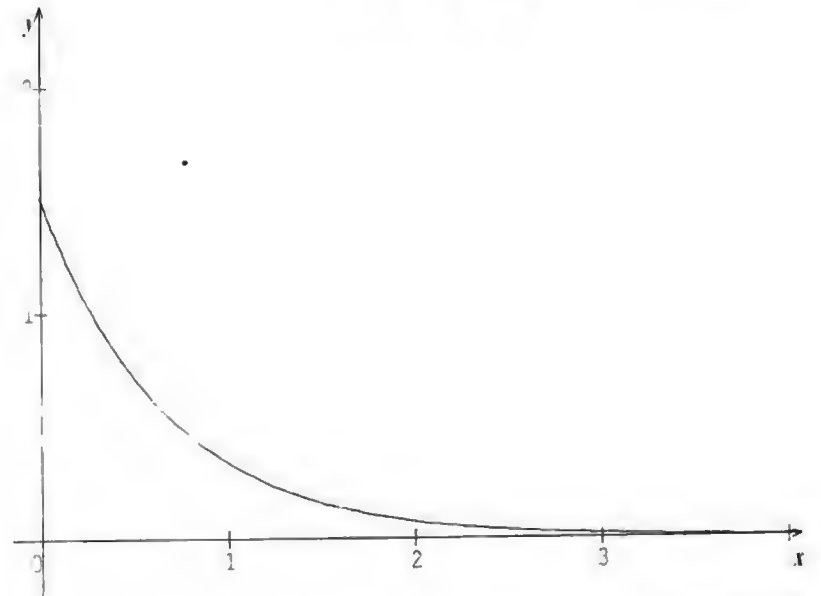
ب- علما أنّها مقبولة، ما احتمال أن تكون قد خضعت للتعديل؟

2. نأخذ بطريقة مستقلة عشر اسطوانات من المنتج . نفرض أن مخرج الآلة يساوي 1.5 .

يسمح بتشبيه هذا السحب بسحب على التوالي مع الارجاع .

أ- ما احتمال أن تكون الاسطوانات العشر مقبولة .

ب- ما احتمال أن ترفض على الأقل اسطوانة ؟



التمرين 4 ( 5 نقط )

1. المستوي المركّب مزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{n}; \vec{v})$  . نعتبر النمط:

$A$  ذات اللاحقة  $a$  حيث  $a \in \mathbb{R}$  ،  $B$  ذات اللاحقة  $b+i$  حيث  $b \in \mathbb{R}$

$C$  صورة  $B$  بالدوران الذي مركزه  $A$  وزاويته  $\frac{\pi}{3}$  .

أ- عَيِّن علاقة بين  $a$  و  $b$  بحيث النقطة  $C$  تقع على المحور  $(O; \vec{v})$  .

ب- عبّر إذا عن لاحقة  $C$  بدلالة  $a$  .

2. في هذا السؤال نضع:  $a = \sqrt{3}$  و  $b = 0$  . نعتبر النقطتين  $C$  ذات اللاحقة  $c = -1$

و  $D$  ذات اللاحقة  $d = 2 + \sqrt{3} - 2i\sqrt{3}$  .

أ- ما هي طبيعة المثلث  $ABC$  .

ب- احسب النسبة  $\frac{d-a}{c-a}$  ، ماذا يمكننا أن نستنتج عن المثلث  $ACD$  ؟

ج- عَيِّن لاحقة النقطة  $E$  صورة  $D$  بالدوران الذي مركزه  $A$  وزاويته  $\frac{\pi}{3}$  .

د- عَيِّن لاحقة النقطة  $F$  صورة  $D$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\vec{AC}$  .

و- عَيِّن طبيعة المثلث  $BEF$  .

التمرين 5 ( 5 نقط )

الجزء I

نعتبر متتاليتين للنقط  $A_n$  و  $B_n$  المعرفتين من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بالطريقة التالية:

على المحور  $(O; \vec{n})$  معطى في نهاية التمرين، النقطة  $A_0$  فاصلتها 0، والنقطة  $B_0$  فاصلتها 12.

النقطة  $A_{n+1}$  هي مرجح الجملة  $\{(A_n; 2); (B_n; 1)\}$ ، النقطة  $B_{n+1}$  هي مرجح الجملة  $\{(A_n; 1); (B_n; 3)\}$  .

1. ضع على الرسم النقطتين  $A_2$  و  $B_2$  .

2. نعرّف المتتاليتين العدديتين  $(a_n)$  و  $(b_n)$  لفواصل النقطتين  $A_n$  و  $B_n$  على الترتيب

بيّن أن:  $a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}$  . ثم أن:  $b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4}$

الجزء II

1. نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ، بـ:  $u_n = b_n - a_n$

أ- بيّن أن المتتالية  $(u_n)$  هندسية يطلب تعيين أساسها .

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b) \text{ أي } \ln\left(\frac{1}{b}\right) + \ln(b) = \ln\left(\frac{1}{b} \times b\right) = \ln(1) = 0 \dots$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \text{ و}$$

$$3. \text{ علما أن: } 0.69 \leq \ln 2 \leq 0.70 \text{ و } 1.09 \leq \ln 3 \leq 1.10$$

$$\text{ينتج أن: } 0.69 + 1.09 \leq \ln 2 + \ln 3 \leq 0.70 + 1.10 \text{ أي } 1.78 \leq \ln 6 \leq 1.80$$

$$\text{وكذلك } -1.80 \leq -\ln 6 \leq -1.78 \text{ أي } -1.80 \leq \ln\left(\frac{1}{6}\right) \leq -1.78$$

$$\text{ولدينا: } \ln 8 = \ln(2^3) = 3 \ln 2 \text{ إذا: } 3 \times 0.69 \leq 3 \ln 2 \leq 3 \times 0.70$$

$$\text{أي: } 2.07 \leq \ln 8 \leq 2.10 \text{ و بالتالي: } -2.10 \leq -\ln 8 \leq -2.07$$

$$\text{إذا: } 1.01 - \ln\left(\frac{3}{8}\right) \leq -0.97 \text{ يعني أن } 1.09 - 2.10 \leq \ln 3 - \ln 8 \leq 1.10 - 2.07$$

التمرين 2 (3 نقط)

$$1. \text{ المعادلة } e^{2x} - 3e^x - 4 = 0 \text{ في } R \text{ حلا واحداً (الاجابة - ب -) ذلك لأن:}$$

$$\begin{cases} y' = e^x \\ y' = -4 \text{ و } y' = -1 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} y' = e^x \\ y^2 - 3y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{تكافئ } e^x = 4 \text{ أي } x = \ln 4$$

$$2. \text{ العبارة } e^{-x} - \text{دوما سالبة تماما (الاجابة - ب -) ذلك لأن:}$$

$$e^{-x} \text{ موجب تماما من أجل كل } x \text{ من } R$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2e^x - 1}{e^x + 2} \right) = 2 \text{ (الاجابة - ج -) ذلك لأن:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x}) = 0 \text{ و } \frac{2e^x - 1}{e^x + 2} = \frac{e^x(2 - e^{-x})}{e^x(1 + 2e^{-x})} = \frac{2 - e^{-x}}{1 + 2e^{-x}}$$

$$4. \text{ مجموعة حلول المعادلة التفاضلية } y = 2y' - 1 \text{ هي: } y = ke^{\frac{1}{2}x} - 1 \text{ حيث: } k \in R$$

(الاجابة - ج -) ذلك لأن:

$$(y+1)' = \frac{1}{2}(y+1) \text{ أي } y' = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \text{ تكافئ } y = 2y' - 1$$

ب- أعط عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$ .

ج- احسب نهاية  $(u_n)$ . ترجم هندسيا النتيجة.

2. أ- بين أن المتتالية  $(a_n)$  متزايدة (يمكننا استعمال إشارة  $u_n$ )

ب- ادرس اتجاه تغير المتتالية  $(b_n)$ .

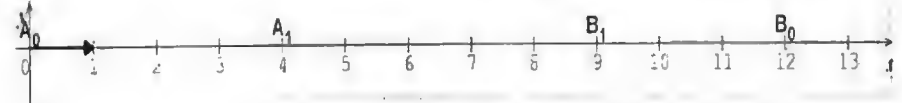
3. ماذا يمكننا أن نستنتج مما سبق فيما يتعلق بتقارب المتتاليتين  $(a_n)$  و  $(b_n)$ ؟

الجزء III

نعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ، بـ:  $v_n = 4h_n + 3a_n$ .

1. بين أن المتتالية  $(v_n)$  ثابتة.

2. عين نهايات المتتاليتين  $(a_n)$  و  $(b_n)$ .



تصحيح الموضوع الخامس

بكالوريا علوم تجريبية -- جوان 2006 -- غويانا الفرنسية

التمرين 1 (3 نقط)

1. مراجعة مفاهيم في الدرس

أ- نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بالدستور:  $f(x) = \ln(ax) - \ln(x)$

حيث  $a$  عدد حقيقي موجب تماما.

$$\text{لدينا من أجل كل } x \text{ من المجال } ]0; +\infty[, f'(x) = \frac{a}{ax} - \frac{1}{x} = 0$$

ينتج من هذا أن الدالة  $f$  ثابتة. أي من أجل كل  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$ ,

$f(x)$  ثابت بالنسبة لـ  $x$ .

وبما أن  $f(1) = \ln(a) - \ln(1) = \ln(a)$  فإن  $f(x) = \ln(a)$  من أجل كل  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$ .

أي  $\ln(ax) - \ln(x) = \ln(a)$  بعبارة أخرى، من أجل كل  $x$  و  $a$  من المجال  $]0; +\infty[$ ,

$$\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$$

2. من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماماً  $a$  و  $b$  لدينا:

1. أ- احتمال أن تكون الاسطوانة مقبولة هو:

$$p_1 = p(X \leq 1) + 0.8 \times p(1 \leq X \leq 2) \approx 0.777 + 0.8 \times 0.173 \approx 0.915$$

ب- احتمال أن تكون قد خضعت للتعديل علما أنها مقبولة هو:

$$\frac{0.8 \times p(1 \leq X \leq 2)}{p(X \leq 1) + 0.8 \times p(1 \leq X \leq 2)} \approx \frac{0.8 \times 0.173}{0.915} \approx 0.151$$

2. أ- احتمال أن تكون الاسطوانات العشر مقبولة هو:  $(p_1)^{10}$ .

ب- احتمال أن ترفض على الأقل اسطوانة هو:  $1 - (p_1)^{10}$ .

التمرين 4 (5 نقط)

1. المستوي المركب مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

أ- بما أن  $C$  صورة  $B$  بالدوران الذي مركزه  $A$  وزاويته  $\frac{\pi}{3}$  فإن لاحقة  $C$  هي:

$$e^{i\frac{\pi}{3}}(b+i-a)+a$$

$$e^{i\frac{\pi}{3}}(b+i-a)+a = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})(b-i+a)+a = \frac{1}{2}(b+a-\sqrt{3}) + \frac{1}{2}i((b-a)\sqrt{3}+1)$$

$$C \text{ تقع على المحور } (O; \vec{v}) \text{ يكافئ } \frac{1}{2}(b+a-\sqrt{3}) = 0 \text{ أي } b+a = \sqrt{3}$$

ب- إذا:  $z_C$  لاحقة  $C$  نكتب بدلالة  $a$  كما يلي:

$$z_C = \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2}i((\sqrt{3}-a-a)\sqrt{3}+1) = (2-a\sqrt{3})i$$

2. لدينا:  $a = \sqrt{3}$  و  $b = 0$

أ- المثلث  $ABC$  متقايس الأضلاع. ذلك لأن:  $A(\sqrt{3})$  و  $B(i)$  و  $C(-i)$

$$AB = AC = BC = 2 \text{ أي:}$$

$$\text{ب- } \frac{d-a}{c-a} = \frac{2+\sqrt{3}-2i\sqrt{3}-\sqrt{3}}{-i-\sqrt{3}} = 2i \text{ ينتج من هذا أن:}$$

$$\arg\left(\frac{d-a}{c-a}\right) = \arg(2i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \text{ عدد صحيح}$$

يعني أن المثلث  $ACD$  قائم الزاوية في  $A$ .

التمرين 3 (5 نقط)

الجزء A

$X$  المتغير العشوائي المستمر  $X$  الذي يتبع القانون الأسّي ذو الوسيط  $\lambda$ .

$$\text{إذا: } p(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda a}$$

1. الاحتمال  $p(X \leq 1)$  يمثل هندسيا، مساحة الحيز المستوي المحدد بمنحني دالة الكثافة والمستقيمات التي معادلاتها:  $x=0$  و  $x=1$  و  $y=0$ .

2. دالة الكثافة هي:  $f: x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$  معرفة على المجال  $[0; +\infty[$ . ولدينا  $f'(0) = \lambda$ .

إذا: الوسيط  $\lambda$  هو ترتيب نقطة تقاطع منحني دالة الكثافة مع محور الترتيب.

الجزء B نضع:  $\lambda = 1.5$

$$1. p(X \leq 1) = \int_0^1 1.5e^{-1.5x} dx = 1 - e^{-1.5} \approx 0.777$$

$$2. p(X \geq 2) = 1 - p(X < 2) = e^{-1.5 \times 2} = e^{-3}$$

$$3. \text{ لدينا: } p(1 \leq X \leq 2) = p(X \leq 2) - p(X \leq 1)$$

$$\text{إذا: } p(1 \leq X \leq 2) = (1 - e^{-3}) - (1 - e^{-1.5}) = e^{-1.5} - e^{-3} = 0.173 \dots$$

$$4. \text{ لحساب } F(x) = \int_0^x 1.5te^{-1.5t} dt \text{ نستعمل التكامل بالتجزئة.}$$

$$\text{نضع: } \begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = 1.5e^{-1.5t} \end{cases} \text{ ينتج أن } \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -e^{-1.5t} \end{cases} \text{ وبالتالي:}$$

$$F(x) = \int_0^x 1.5te^{-1.5t} dt = \left[ -te^{-1.5t} \right]_0^x - \int_0^x -e^{-1.5t} dt = -xe^{-1.5x} - \left[ \frac{1}{1.5}e^{-1.5t} \right]_0^x$$

$$= -xe^{-1.5x} - \frac{1}{1.5}e^{-1.5x} + \frac{1}{1.5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-x} = 0 \text{ كون: } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{1}{1.5}$$

$$\text{إذا: الأمل الرياضي للمتغير العشوائي } X \text{ هو } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{1}{1.5} \text{ أي: } E(X) = \frac{1}{1.5}$$

الجزء C

الانحراف هو المتغير العشوائي  $X$  يتبع القانون الأسّي ذو الوسيط  $\lambda = 1.5$ .

يعني أن  $(u_n)$  هندسية أساسها  $\frac{15}{12}$ .

ب- من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n = \left(\frac{15}{12}\right)^n \times u_0 = 12 \left(\frac{15}{12}\right)^n$

ج-  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 12 \left(\frac{15}{12}\right)^n = 0$  كون  $-1 < \frac{15}{12} < 1$

2. أ-  $a_{n+1} - a_n = \frac{2a_n + b_n}{3} - a_n = \frac{b_n - a_n}{3} = \frac{u_n}{3} > 0$

يعني أن المتتالية  $(a_n)$  متزايدة تماما.

ب-  $b_{n+1} - b_n = \frac{a_n + 3b_n}{4} - b_n = \frac{a_n - b_n}{4} = -\frac{u_n}{4} > 0$

يعني أن المتتالية  $(b_n)$  متناقصة تماما.

3. حسب ما سبق بيئنا أن  $(a_n)$  متزايدة تماما و  $(b_n)$  متناقصة تماما و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$

هذا يعني أن المتتاليتين  $(a_n)$  و  $(b_n)$  متجاورتين. وبالتالي متقاربتان نحو نفس العدد  $l$ .

### الجزء III

نعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ، بـ:  $v_n = 4b_n + 3a_n$

1. من أجل كل عدد طبيعي  $n$

$v_{n+1} - v_n = (4b_{n+1} + 3a_{n+1}) - (4b_n + 3a_n) = 4 \frac{a_n + 3b_n}{4} + 3 \frac{2a_n + b_n}{3} - 4b_n - 3a_n = 0$

يعني أن المتتالية  $(v_n)$  ثابتة.

2. بما أن  $(v_n)$  ثابتة فإن:  $v_n = v_0 = 4b_0 + 3a_0 = 48$

وبالتالي:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 48$  أي  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (4b_n + 3a_n) = 48$

يعني أن  $4l + 3l = 48$  يكافئ  $l = \frac{48}{7}$

إذًا:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{48}{7}$

ج- بما أن  $E$  صورة  $D$  بال دوران الذي مركزه  $A$  وزاويته  $\frac{\pi}{3}$  فإن لاحقة  $E$  هي:

$e^{i\frac{\pi}{3}}(d-a) + a$  ولدينا:

$e^{i\frac{\pi}{3}}(d-a) + a = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})(2+\sqrt{3}-2i\sqrt{3}-\sqrt{3}) + \sqrt{3} = 4 + \sqrt{3}$

د- بما أن  $F$  صورة  $D$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\overrightarrow{AC}$  فإن لاحقة  $F$  هي:

$2 + \sqrt{3} - 2i\sqrt{3} + (-i - \sqrt{3}) = 2 - i(1 + 2\sqrt{3})$

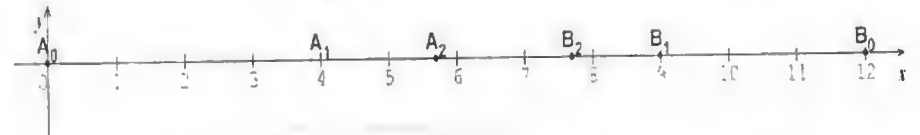
و-  $BEF$  متقايس الأضلاع. ذلك لأن:  $BF^2 = BE^2 = EF^2 = 20 + 8\sqrt{3}$

التمرين 5 (5 نقط)

الجزء I

1.  $A_2$  هي مرجح الجملة  $\{(A_1; 2); (B_1; 1)\}$  أي  $\overrightarrow{A_2 A_1} = \frac{1}{3} \overrightarrow{B_1 A_1}$

$B_2$  هي مرجح الجملة  $\{(A_1; 1); (B_1; 3)\}$  أي  $\overrightarrow{B_2 A_1} = \frac{3}{4} \overrightarrow{B_1 A_1}$



2. لدينا  $A_{n+1}$  هي مرجح الجملة  $\{(A_n; 2); (B_n; 1)\}$  إذًا:  $x_{A_{n+1}} = \frac{2 \times x_{A_n} + 1 \times x_{B_n}}{2+1}$

أي:  $a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}$

لدينا  $B_{n+1}$  هي مرجح الجملة  $\{(A_n; 1); (B_n; 3)\}$  إذًا:  $x_{B_{n+1}} = \frac{1 \times x_{A_n} + 3 \times x_{B_n}}{1+3}$

أي:  $b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4}$

الجزء II

1. نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ، بـ:  $u_n = b_n - a_n$

$u_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4} - \frac{2a_n + b_n}{3} = \frac{15}{12}(b_n - a_n) = \frac{15}{12}u_n$

ت) أعط تفسيراً هندسياً للعدد  $I_2$ . نظهر ذلك في الرسم السابق للمحني  $(C')$ .  
3. أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $[0;1]$  ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$ ، لدينا المتباينة المضاعفة:  $x^n e^{1-x} \leq x^n \leq x^n e^{1-x}$ .

ب) استنتج حصراً للعدد  $I_n$ ، ثم نهاية  $I_n$  عندما ينتهي  $n$  إلى  $+\infty$ .

### التمرين 3 (5 نقط)

نعتبر المستوي المركب  $(P)$  المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .  
في كل التمرين، الرمز  $\{O\}/(P)$  يشير إلى المستوي  $(P)$  باستثناء نقطة المبدأ  $O$ .

#### 1. سؤال الدرس

نذكر بالنتيجتين التاليتين:

- إذا كان  $z$  و  $z'$  عدداً مركباً غير معدومين فإن:

$$k / \arg(z z') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi$$

- من أجل كل شعاع  $\vec{w}$  غير معدوم لاحقة  $z$  لدينا:  $k / \arg(z) = (\vec{u}; \vec{w}) + 2k\pi$  عدد صحيح.

أ)  $z$  و  $z'$  عدداً مركباً غير معدومين، بين أن:  $k / \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$  عدد صحيح.

ب) بين أنه: إذا كانت  $A, B, C$  ثلاثة نقط من المستوي متمايزة مثني مثني ولواحقها على

الترتيب  $a, b, c$  فإن:  $k / \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) + 2k\pi$  عدد صحيح.

2. نعتبر الدالة  $f$  من  $\{O\}/(P)$  نحو  $\{O\}/(P)$  والتي ترفق بكل نقطة  $M$  ذات

اللاحقة  $z$  النقطة  $M'$  ذات اللاحقة  $z'$  حيث:  $z' = \frac{1}{z}$ .

نسمي  $U$  و  $V$  النقطتان من المستوي لاحقتهم  $1$  و  $i$  على الترتيب.

أ) بين أنه من أجل  $z \neq 0$ ، لدينا:  $k / \arg(z') = \arg(z) + 2k\pi$  عدد صحيح.

استنتج أنه من أجل كل نقطة  $M$  من  $\{O\}/(P)$ ، النقطتان  $M$  و  $M' = f(M)$

تنتميان إلى نفس النصف مستقيم الذي مبدؤه  $O$ .

ب) عين مجموعة النقط  $M$  من  $\{O\}/(P)$  حيث:  $M = f(M)$ .

ج)  $M$  نقطة من المستوي  $(P)$  تختلف عن  $O, U$  و  $V$ . نقبل أن  $M'$  بدورها تختلف

عن  $O, U$  و  $V$ .

## الموضوع السادس

بكالوريا علوم تجريبية ----- جوان 2006 ----- فرنسا

### التمرين 1 (4 نقط)

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم للفضاء متعامد ومتجانس. نعتبر النقط  $A(2;4;1), B(0;4;-3), C(3;1;-3)$ ,

$$D(1;0;-2), E(3;2;-1), F\left(\frac{3}{5}; 4; -\frac{9}{5}\right).$$

أذكر إن كانت صحيحة أم خاطئة كلا من العبارات التالية. (دون التعليل)

1. معادلة المستوي  $(ABC)$  هي:  $2x + 2y - z - 11 = 0$ .

2. النقطة  $E$  هي المسقط العمودي للنقطة  $D$  على المستوي  $(ABC)$ .

3. المستقيمان  $(AB)$  و  $(CD)$  متعامدان.

4. المستقيم  $(C'D)$  يتعين بالتمثيل الوسيطى التالي:  $t \in \mathbb{R} / (C'D): \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$

5. المستقيم  $(AB)$  يشمل النقطة  $I$ .

### التمرين 2 (5 نقط)

1. الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بالدستور:  $f(x) = x^2 e^{1-x}$

نسمي  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

وحدة الرسم  $2cm$ .

أ) عين نهايات  $f$  عند  $+\infty$  ثم عند  $-\infty$ ، ما هي النتيجة الهندسية التي يكمن استخلاصها

بالنسبة للمحني  $(C_f)$ ؟

ب) علل قابلية اشتقاق الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ ، ثم عين دالتها المشتقة  $f'$ .

ج) ارسم جدول تغيرات الدالة  $f$ ، وانشئ المنحني  $(C_f)$ .

2.  $n$  عدد طبيعي غير معدوم، نعتبر التكامل  $I_n$  المعروف كما يلي:  $I_n = \int_1^2 x^n e^{1-x} dx$

أ) أوجد علاقة بين  $I_n$  و  $I_{n+1}$ .

ب) أحسب  $I_1$  ثم  $I_2$ .

أ) أحسب التواتر  $f_k$  لنمط ج الملاحظة لكل وجه.

ب) نضع:  $d^2 = \sum_{k=1}^4 \left( f_k - \frac{1}{4} \right)^2$ . أحسب  $d^2$ .

ت) نحري الآن 1000 محاكاة لـ 200 رمية لزهرة النرد المتقنة التوازن، نحسب من أجل كل محاكاة العدد  $d^2$ .

فنحصل على سلسلة إحصائية ذات 1000 قيمة للعدد  $d^2$ ، مرتبة في الجدول التالي:

min	$D_1$	$Q_1$	med	$Q_3$	$D_9$	max
0.00124	0.00192	0.00235	0.00281	0.00345	0.00452	0.01015

بمجازفة مقدارها 10%، هل يمكن اعتبار أن هذا النرد غير متوازن؟

### تصحيح الموضوع السادس

بكالوريا علوم تجريبية ---- جوان 2006 ---- فرنسا

التمرين 1 (4نقط)

1. العبارة صحيحة. ذلك لأن:

$$2(2) + 2(4) - 1 - 11 = 0$$

$$2x + 2y - z - 11 = 0. \text{ نتحقق بنفس الكيفية أن } B \text{ و } C \text{ نقطتان من هذا المستوى.}$$

$$\text{ولدينا: } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ و } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ غير مرتبطين خطياً (كون } 1 \times 0 - 2 \times 3 \neq 0 \text{)}$$

أي النقط الثلاث  $A, B, C$  ليست على استقامة واحدة.

2. العبارة خاطئة. ذلك لأن:  $2(3) + 2(2) + 1 - 11 = 0$ ، محققة، يعني أن  $E$  نقطة من

المستوي  $(ABC)$ : ولكن الشعاع  $\overrightarrow{DE}$  لا يعامد  $\overrightarrow{AB}$

$$\text{كون } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ و } \overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ و } \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AB} = -4 + 0 - 4 \neq 0$$

$$3. \text{ العبارة صحيحة. ذلك لأن: } \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ و } \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 + 0 - 4 = 0$$

نتحقق من المساواة المضاعفة:  $\frac{z'-1}{z'-i} = \frac{1}{i} \left( \frac{z-1}{z+i} \right) = -i \left( \frac{z-1}{z+i} \right)$  واستنتج علاقة بين:  $\arg \left( \frac{z-1}{z+i} \right)$  و  $\arg \left( \frac{z'-1}{z'-i} \right)$

3. أ) ليكن  $z$  العدد المركب حيث  $z \neq 1$  و  $z \neq i$  ولتكن  $M$  النقطة ذات اللاحقة  $z$ .

بين أن:  $M$  نقطة من المستقيم  $(UV)$  باستثناء  $U$  و  $V$  إذا وفقط إذا كان  $\frac{z-1}{z-i} = -i$  عدد حقيقي غير معدوم.

ب) عين صورة المستقيم  $(UV)$  باستثناء  $U$  و  $V$  بالدالة  $f$ .

التمرين 4 (5 نقط)

1. في لعبة القنص. يقوم قناص بإجراء طلاقات متتالية صوب كرة هوائية لثقبها.

علما أن احتمال ثقب الكرة في كل طلقة هو 0.2.

يتوقف اللاعب عندما تثقب الكرة. ( نفرض أن الطلاقات المتتالية مستقلة).

أ) ما احتمال أن تبقى الكرة سالمة في نهاية الطلقة الثانية؟

ب) ما احتمال أن تكون طلقتان كافيتان لثقب الكرة؟

ج) ما الاحتمال  $p_n$  أن نكون  $n$  طلقة كافية لثقب الكرة؟

د) من أجل أي قيم للعدد الطبيعي  $n$  يكون لدينا  $p_n > 0.99$ ؟

2. يشارك هذا القنص في اللعبة التالية. يرمي أولا نرداً رباعي الوجود منتظم رقمت

أوجهه الأربعة من 1 إلى 4 ( الوجه الذي نحصل عليه عند الإلقاء هو الوجه القاعدة).

ليكن  $k$  رقم الوجه المحصل عليه. يتوجه اللاعب إلى حلبة القنص ولديه الحق في القيام بـ  $k$  طلقة لثقب الكرة.

بين أنه إذا كان النرد جيد التوازن، فإن احتمال ثقب الكرة هو 0.4096

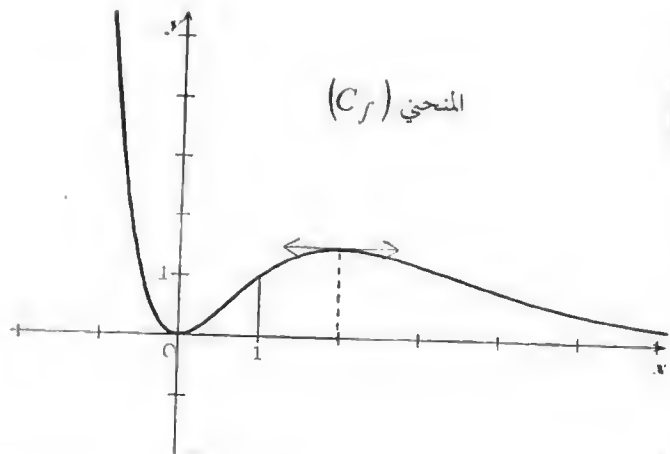
( يمكنك استعمال شجرة الاحتمالات).

3. اللاعب يرغب في التأكد من أن النرد فعلاً متوازن، لذلك قام بإلقاء هذا النرد 200

مرة وسجلت النتائج في الجدول التالي:

الوجه $k$	1	2	3	4
عدد مرات ظهور الوجه الذي يحمل الرقم $k$	58	49	52	41





2. أ) من أجل  $n$  عدد طبيعي غير معدوم،  $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} dx$  نكامل بالتجزئة

$$\text{نضع: } \begin{cases} u_{n+1}(x) = x^{n+1} \\ v(x) = -e^{1-x} \end{cases} \quad \text{إذا: } \begin{cases} u'_{n+1}(x) = (n+1)x^n \\ v'(x) = e^{1-x} \end{cases}$$

$$\text{وبالتالي: } I_{n+1} = [u_{n+1}(x) \times v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'_{n+1}(x) \times v(x) dx$$

$$\text{منه: } I_{n+1} = \left[ -x^{n+1} e^{1-x} \right]_0^1 + \int_0^1 (n+1)x^n e^{1-x} dx \\ I_{n+1} = (n+1)I_n - 1 \quad \text{إذا: } I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$$

ب) لحساب  $I_1 = \int_0^1 x e^{1-x} dx$  نضع نفس طريقة التكامل بالتجزئة في الحالة خاصة  $n=1$

$$\text{نجد: } I_1 = \left[ -x e^{1-x} \right]_0^1 + \int_0^1 e^{1-x} dx = e - 2 \quad \text{و بتطبيق العلاقة السابقة}$$

$$\text{نجد: } I_2 = (1+1)I_1 - 1 = 2(e-2) - 1 = 2e - 5$$

ج)  $I_2 = \int_0^1 x^2 e^{1-x} dx = \int_0^1 f(x) dx$  وبما أن الدالة  $f$  موجبة فإن  $I_2$  يمثل ربع مساحة الحيز

المستوي المحدد بالمنحني  $(C_f)$  والمستقيمات التي معادلتها:  $x=0$ ،  $y=0$ ،  $x=1$

3. أ) من أجل كل  $x$  من المجال  $[0;1]$ ،  $0 \leq x \leq 1$  يكفي  $-1 \leq -x \leq 0$

أي  $0 \leq 1-x \leq 1$  يكفي  $1 \leq e^{1-x} \leq e$  كون الدالة الأسية متزايدة

يكفي  $x'' \leq x'' e^{1-x} \leq x'' e$  كون  $x''$  موجب على  $[0;1]$ .

أي  $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ .

4. العبارة خاطئة. ذلك لأن:

$$\text{النقطة } C' \text{ لا تحقق الجملة } (C') : \begin{cases} x = -1+2t \\ y = -1+t \\ z = 1-t \end{cases} \text{ أي: } \begin{cases} 3 = -1+2t \\ 1 = -1+t \\ -3 = 1-t \end{cases} \text{ تعطي الجملة } t = 2 \text{ تناقض.}$$

5. العبارة صحيحة. ذلك لأن:

$$\text{لدينا: } \overline{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ و } \overline{AI} \begin{pmatrix} -7/5 \\ 0 \\ -14/5 \end{pmatrix} \text{ وبالتالي } \overline{AB} = \frac{10}{7} \overline{AI} \text{ أي الشعاعان } \overline{AB} \text{ و } \overline{AI} \text{ مرتبطان خطياً.}$$

التمرين 2 (5 نقط)

1.  $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بالدستور:  $f(x) = x^2 e^{1-x}$

$$\text{أ) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{كون } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \quad \text{و } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty \quad \text{كون } f(x) = x^2 e^{1-x} = e \frac{x^2}{e^x} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$$

$$\text{إذا: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0^+$$

نستنتج أن حامل محور الفواصل هو مستقيم مقارب للمنحني  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$ .

ب) الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  باعتبارها مركب وجدا لدوال قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ .

$$\text{من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2xe^{1-x} - x^2 e^{1-x} = x(2-x)e^{1-x}$$

ج) من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $e^{1-x} > 0$ . إذا إشارة  $f'(x)$  من إشارة العدد  $x(2-x)$

الذي جذراه 0 و 2 وهو موجب في المجال  $[0;2]$  وسالب في الخارج.

إذا جدول التغيرات يعطى كما يلي:

$x$	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$+\infty$		$\frac{4}{e}$	0

ب) لدينا من أجل كل  $x$  من المجال  $[0;1]$ ،  $x'' \leq x^n e^{1-x} \leq x'' e$ ، وحسب خاصية

$$\int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \leq \int_0^1 e x'' dx$$

التكامل ينتج:

$$\frac{1}{n+1} < I_n \leq \frac{e}{n+1} \quad \text{منه} \quad \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \leq I_n \leq e \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

عندما ينتهي  $n$  إلى  $+\infty$  فإن العددين  $\frac{1}{n+1}$  و  $\frac{e}{n+1}$  ينتهيان إلى 0

وبالتالي  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$  حسب مبرهنة الحصر.

التمرين 3 (5 نقط)

1. أ)  $z$  عدد مركب غير معدوم. لدينا  $z \times \frac{1}{z} = 1$

$$\arg\left(z \times \frac{1}{z}\right) = \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg(1) = 0 + 2k\pi$$

منه:  $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi$  عدد صحيح.

وبالتالي من أجل كل عددين مركبين غير معدومين  $z$  و  $z'$ .

لدينا:  $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg\left(z \times \frac{1}{z'}\right) = \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$

ب)  $A, B$  و  $C'$  ثلاثة نقط من المستوي متمايزة مثني ولوحاقها على الترتيب  $a, b$  و  $c$

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg(c-a) - \arg(b-a) = (\vec{u}, \vec{AC}) - (\vec{u}, \vec{AB}) = (\vec{AB}, \vec{AC}) + 2k\pi$$

(باستعمال علاقة شال).

2.  $f$  الدالة من  $(P) \setminus \{O\}$  نحو  $(P) \setminus \{O\}$  والتي ترفق بكل نقطة  $M$  ذات

اللاحقة  $z$  النقطة  $M'$  ذات اللاحقة  $z'$  حيث:  $z' = \frac{1}{z}$ .

أ) من أجل  $z \neq 0$ ، لدينا:  $\arg(z') = \arg\left(\frac{1}{z}\right) + 2k\pi$

منه  $\arg(z') = -\arg(z) + 2k\pi$  عدد صحيح.

من العلاقة الأخيرة ينتج أن:  $(\vec{u}, \vec{OM}') = (\vec{u}, \vec{OM}) + 2k\pi$  هذا يعني أن للشعاعين

$OM$  و  $OM'$  نفس الاتجاه.

أي النقطتان  $M$  و  $M' = f(M)$  تنتميان إلى نفس النصف مستقيم الذي مبدؤه  $O$ .

ب) من أجل كل نقطة  $M$  من  $(P) \setminus \{O\}$ ،  $M = f(M)$  معناه  $\frac{1}{z} = z$  أي  $z\bar{z} = 1$

معناه  $|z|^2 = 1$  يكافئ  $|z| = 1$

إذا مجموعة النقط الصامدة في التحويل  $f$  هي الدائرة التي مركزها  $O$  ونصف قطرها 1.

ج) من أجل  $z \neq 0$ ، لدينا:

$$\frac{z'-1}{z'-i} = \frac{\frac{1}{z}-1}{\frac{1}{z}-i} = \frac{1-\bar{z}}{1-i\bar{z}} = \frac{1-\bar{z}}{i(-i-\bar{z})} = \frac{1}{i} \left( \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+i} \right) = \frac{1}{i} \frac{\overline{z-1}}{\overline{z-i}} = -i \left( \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}-i} \right)$$

إذا  $\frac{z'-1}{z'-i} = -i \left( \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}-i} \right)$  ينتج من هذه العلاقة أن:

$$\arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right) = \arg(-i) + \arg\left(\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}-i}\right) + 2k\pi$$

أي  $\arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right) = -\frac{\pi}{2} - \arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right) + 2k\pi$  وهي العلاقة المطلوبة.

3. أ) العدد المركب  $z$  حيث  $z \neq i$  و  $z \neq 1$  و  $z \neq 0$  لتكن  $M$  النقطة ذات اللاحقة  $z$ .

(أي  $M \neq U$  و  $M \neq V$ )

$M$  نقطة من المستقيم  $(UV)$  باستثناء  $U$  و  $V$  إذا فقط إذا كان  $\arg\left(\frac{MU}{MV}\right) = k\pi$  عدد صحيح.

إذا فقط إذا كان  $\arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = k\pi$  معناه  $\frac{z-1}{z-i}$  عدد حقيقي غير معدوم.

ب)  $M(z)$  نقطة من المستقيم  $(UV)$  باستثناء  $U$  و  $V$  معناه  $\arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = l\pi$  عدد صحيح.

لدينا مما سبق  $\arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right) = -\frac{\pi}{2} - \arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right) + 2k\pi$

أي  $\arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right) = -\frac{\pi}{2} + k'\pi$  عدد صحيح.

أي  $k / (\overrightarrow{M'U}; \overrightarrow{M'V}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$  ترسم الدائرة التي قطرها  $[UV]$  معناه  $M'$  باستثناء  $U, V, O$ .

التمرين 4 (5 نقط)  $(\Omega; p)$  فضاء احتمالي منته.

1. يرمز  $A$  للحادثة "ثقت الكرة" ولدينا  $p(A) = 0.2$ .

(أ) احتمال أن تبقى الكرة سالمة في نهاية الطلقة الثانية هو  $p(\bar{A}) \times p(\bar{A})$  (ب) الحادثة "طلقتان كافيتان لثقب الكرة" عكسها هو "الكرة سالمة في نهاية الطلقتين" إذا: احتمال أن تبقى الكرة سالمة في نهاية الطلقة الثانية هو  $1 - 0.64 = 0.36$ .

(ج) الحادثة " $n$  طلقة كافية لثقب الكرة" عكسها هو "الكرة سالمة في نهاية  $n$  طلقة" إذا:  $p_n = 1 - [p(\bar{A})]^n = 1 - (0.8)^n$ .

(د)  $p_n > 0.99$  معناه  $1 - (0.8)^n > 0.99$  يكافئ  $(0.8)^n < 0.01$  أي  $\ln(0.8)^n < \ln(0.01)$  يكافئ  $n \ln(0.8) < \ln(0.01)$  أي  $n > \frac{\ln(0.01)}{\ln(0.8)} \approx 20.63$  إذا  $n \geq 21$ .

2. احتمال ثقب الكرة في الوجه الذي يحمل الرقم  $k$  هو:  $p_k = 1 - (0.8)^k$   $k \in \{1; 2; 3; 4\}$  نفرض أن النرد جيد التوازن، هذا يعني أن للأوجه نفس احتمال الظهور. إذا احتمال ظهور كل وجه هو  $\frac{1}{4}$  الاحتمال. وبالتالي احتمال ثقب الكرة هو:

$$\frac{1}{4}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = \frac{1}{4}[(1 - 0.8) + (1 - 0.64) + (1 - 0.512) + (1 - 0.4096)] = 0.4096$$

3. أ) التواترات هي:  $f_1 = \frac{58}{200} = \frac{29}{100}$ ،  $f_2 = \frac{49}{200}$ ،  $f_3 = \frac{13}{50}$ ،  $f_4 = \frac{52}{200} = \frac{13}{50}$ ،  $f_5 = \frac{41}{200}$ .

(ب)  $d^2 = \sum_{k=1}^4 \left(f_k - \frac{1}{4}\right)^2 \approx 0.00175$

(ج) نلاحظ أن  $d^2 < D_9$ ، إذا: بمحازفة مقدارها 10%، يمكن اعتبار أن هذا النرد متوازن.

## الموضوع السابع

بكالوريا علوم تجريبية --- جوان 2006 --- لارينيون

التمرين 1 (4 نقط)

الجزء A

$f$  الدالة المعرفة على المجال  $]1; +\infty[$  بالدستور:  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ .

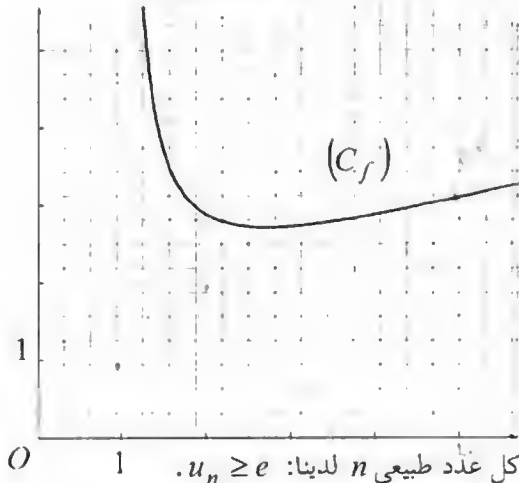
1. أ- عيّن نهايات الدالة  $f$  عند 1 وعند  $+\infty$ .

ب- ادرس تغيرات الدالة  $f$ .

2.  $(u_n)$  المتتالية المعرفة بـ:  $u_0 = 5$  و  $u_{n+1} = f(u_n)$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$ .

أ- الرسم المعطى في التمرين هو للتمثيل البياني  $(C_f)$  للدالة  $f$ . (يرجع الرسم مع ورقة الإجابة).

أنشئ المستقيم الذي معادلته  $y = x$  والنقطتين  $M_1$  و  $M_2$  من  $(C_f)$  ذات الفاصلتين  $u_1$  و  $u_2$  على الترتيب. ضع تخميناً حول سلوك المتتالية  $(u_n)$ .



ب- يبين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  لدينا:  $u_n \geq e$ .

ج- يبين أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة نحو العدد  $l$  من المجال  $[e; +\infty[$ .

الجزء B

نذكر أن الدالة  $f$  مستمرة على المجال  $]1; +\infty[$ .

بدراسة نهاية المتتالية  $(u_n)$  ، يبين أن  $f(l) = l$  . استنتج قيم العدد  $l$

التمرين 2 (6 نقط)

الجزء الأول

احسب التكامل  $\int_0^1 x e^{-x} dx$

الجزء الثاني

الشكل المجاور يمثل هدفاً للرماية مستطيل الشكل  $OIMN$ ،

بحيث في المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \overline{OI}; \overline{OJ})$ ،

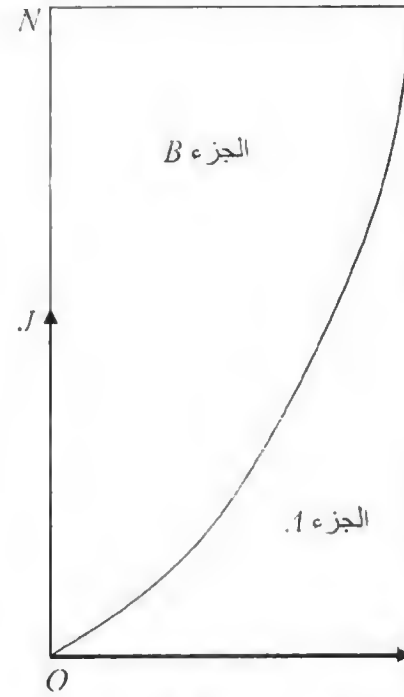
المنحنى الذي يصل بين النقطتين  $O$  و  $M$  هو جزء من

التمثيل البياني  $(\Gamma_f)$  للدالة  $f$  معرفة على  $R$  بالدستور:

$$f(x) = x e^{-x}$$

هذا الجزء من  $(\Gamma_f)$  يفصل المستطيل إلى قسمين  $A$  و  $B$ .

(مثل ما يوضحه الشكل).



لعبة تكمن في رمي سهم ليصيب إما خارج الهدف وإما أحد القسمين  $A$  أو  $B$ .

نفرض أن السهم عند الرماية لا يصيب حدود الهدف ولا المنحنى  $(\Gamma_f)$ .

دراسة احصائية أوضحت أن احتمال أن يصيب السهم خارج الهدف هو 0.5،

وأن احتمال إصابة أحد الجزئين  $A$  أو  $B$  متناسب مع مساحتهما.

1. بين أن احتمال إصابة الجزء  $A$  يساوي  $\frac{1}{2e}$ . ما هو احتمال إصابة الجزء  $B$ ؟

2. نرمي بطريقة مستقلة ثلاثة أسهم.

أ- ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الأسهم التي تصيب الجزء  $A$ .

عَيِّن قانون الاحتمال للمتغير  $X$  واحسب أملة الرياضي.

ب- نعتبر الحادثة  $E$  "سهمين بالظبط يصيبان الجزء  $A$ ". أعط قيمة مفرقة لاحتمال  $E$  إلى  $10^{-3}$ .

ج- نعتبر الحادثة  $F$  "الأسهم الثلاثة تصيب الجزء  $B$ ". احسب احتمال  $F$  (تعطى القيمة المطلوبة).

علما أن ولا سهم اصاب خارج الهدف، ما هو احتمال أن تصيب الأسهم الثلاثة الجزء  $B$ ؟

3. نرمي هذه المرة بطريقة مستقلة  $n$  سهم.

أ- عَيِّن بدلالة  $n$  الاحتمال  $p$  أن يصيب على الأقل سهم واحد الجزء  $A$ .

ب- عَيِّن أصغر عدد طبيعي  $n$  يحقق:  $p_n \geq 0.99$ .

التمرين 3 (5 نقط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . وحدة القياس  $2cm$ .

$i$  يرمز إلى العدد المركب الذي طويلته 1 و العدد  $\frac{\pi}{2}$  عمدة له.

ننجز شكلاً مناسباً و نملأ تدريجياً مع التقدم في الأسئلة.

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة  $C$  المعادلة  $\frac{z-4}{z} = i$ .

تكتب الحلول بالشكل الجبري.

2. حل في  $C$  المعادلة  $z^2 - 2z + 4 = 0$ . تكتب الحلول بالشكل الأسّي.

3. نعتبر النقط  $A, B, A', D$  من المستوي المركب لواحقيقاً على الترتيب

$a = 2, b = 4, a' = 2i, d = 2 + 2i$ . ما طبيعة المثلث  $ODB$ ؟

4. لتكن النقطتين  $E$  و  $F$  ذات اللاحقتين  $e = 1 - i\sqrt{3}$  و  $f = 1 + i\sqrt{3}$  على

الترتيب. ما طبيعة الرباعي  $OEAF$ ؟

5. الدائرة التي مركزها  $A$  ونصف قطرها 2 و  $(c')$  الدائرة التي مركزها  $A'$  ونصف

قطرها 2. ليكن  $r$  الدوران الذي مركزه  $O$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$ .

أ-  $E'$  هي صورة النقطة  $E$  بالدوران  $r$ . أحسب  $c'$  لاحقة النقطة  $E'$ .

ب- بين أن النقطة  $E'$  تنتمي إلى الدائرة  $(c')$ .

ج- تحقق أن  $e - d = (\sqrt{3} + 2)(e' - d)$ . واستنتج أن النقط  $E, F, E', D$  و

على استقامة واحدة.

6. نعتبر  $D'$  صورة النقطة  $D$  بالدوران  $r$ . بين أن المثلث  $EE'D'$  قائم.

التمرين 4 (4 نقط)

لكل سؤال من الأسئلة الأربعة 1; 2; 3 و 4 هناك أربع اجوبة مقترحة (جوابين صحيحين

وجوابين خاطئين).

الترشح يضع على ورقة الاجابة رقم السؤال والعبارتين اللتين يحكم بصحتها. لا يطلب أي تعليل.

الأسئلة الأربعة مستقلة وينقّط كل سؤال على 1. كل جواب صحيح علامته 0.5.

في حالة تقديم أكثر من إجابتين لسؤال واحد، تلغى الإجابتان.

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

1. نعتبر المستوي  $(P)$  الذي معادلته  $2x + 3y + 4z - 1 = 0$ .

أ- المسافة بين النقطة  $O$  والمستوي  $(P)$  تساوي 1.

ب- المسافة بين النقطة  $O$  والمستوي  $(P)$  تساوي  $\frac{1}{\sqrt{29}}$ .

ج- الشعاع  $\vec{n}\left(1; \frac{3}{2}; 2\right)$  هو ناظم على المستوي  $(P)$ .

د- المستوي  $(Q)$  الذي معادلته  $-5x + 2y + z = 0$  يوازي المستوي  $(P)$ .

2. نعتبر المستوي  $(P)$  الذي معادلته  $2x + y - z = 0$ ، والمستقيم  $(D)$  الذي يشمل

النقطة  $A(1; 1; 1)$  وشعاع توجيهه  $\vec{u}(1; -4; -2)$ .

أ- المستقيم  $(D)$  يوازي المستوي  $(P)$ .

ب- المستقيم  $(D)$  يعامد المستوي  $(P)$ .

ج- المستقيم  $(D)$  يقطع المستوي  $(P)$ .

ج- تمثيل وسيطي للمستقيم  $(D)$  هو:  $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$  حيث  $(t \in \mathbb{R})$

3.  $E$  تمثل مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  حيث:  $x + y + z = 3$  و  $2x - z = 1$ . نعتبر

النقطة  $A(1; 1; 1)$ .

أ- المجموعة  $E$  تنظم نقطة واحدة وهي  $A$ .

ب- المجموعة  $E$  هي مستقيم يمر من  $A$ .

ج- المجموعة  $E$  هي مستوي يمر من  $A$ .

د- المجموعة  $E$  هي مستقيم شعاع توجيهه  $\vec{u}(1; -3; 2)$ .

4.  $ABCD$  رباعي وجوه.  $(P)$  المستوي الذي يمر من الرأس  $A$  ويعامد المستقيم  $(BC')$ .

أ- المستوي  $(P)$  يشمل دائما النقطة  $D$ .

ب- المستوي  $(P)$  يشمل دائما العمود  $(AH)$  للمثلث  $ABC$ .

ج- المستوي  $(P)$  هو دوما مجموعة النقط  $M$  من الفضاء التي تحقق  $\vec{BM} \cdot \vec{BC} = \vec{BA} \cdot \vec{BC}$ .

د- المستوي  $(P)$  هو دوما المستوي المحوري للقطعة المستقيمة  $[BC']$ .

### تصحيح الموضوع السابع

بكالوريا علوم تجريبية --- جوان 2006 --- لارينيون

التمرين 1 (4نقط)

الجزء A

$f$  الدالة المعرفة على المجال  $]1; +\infty[$  بالدستور:  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ .

1. أ-  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\ln x}\right) = +\infty$  كون  $\ln 1 = 0$ ،  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{\ln x}\right) = +\infty$  (مقلوب نهاية شهيرة)

ب-  $f$  هي حاصل قسمة دالتين قابلتين للاشتقاق على مجموعة تعريقهما وبالتالي  $f'$  قابلة للاشتقاق على  $]1; +\infty[$ .

$$f'(x) = \frac{(x)' \ln x - (\ln x)' x}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

$(\ln x - 1)$  ينعدم عند  $e$ ، موجب تماما في  $]e; +\infty[$  وسالب تماما في  $]1; e[$  وبالتالي جدول

$x$	1	$e$	$+\infty$
$f'$		0	+

التغيرات  $f$ :

$x$	1	$e$	$+\infty$
$f$	$+\infty$	$e$	$+\infty$

تتقارب بسرعة. (انظر الرسم)

ب- لدينا  $u_0 = 5 \geq e$

نحقق، و من أجل كل عدد طبيعي

$n > 0$ .  $u_n$  هو صورة بالدالة  $f$  لعدد حقيقي.

حسب جدول تغيرات الدالة  $f$  لدينا:  $f(x) \geq e$  من أجل كل  $x > 1$  أي  $u_n \geq e$ .

ج - لدينا  $u_{n+1} - u_n = \frac{(1 - \ln u_n)u_n}{\ln u_n}$  و لدينا ماسبق أن  $u_n \geq e$  أي  $\ln u_n \geq 1$

إذا إشارة  $u_{n+1} - u_n$  هي من إشارة  $(1 - \ln u_n)$  الذي هو سالب من أجل كل عدد

طبيعي  $n$ .

$$\int_0^1 x e^{-x} dx = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 v(x)u'(x)dx = [xe^{-x}]_0^1 - [e^{-x}]_0^1 = 1$$

الجزء الثاني

1. مساحة الحيز  $A$  من المستوي هو  $\int_0^1 x e^{-x} dx$  وقيمتها 1.

مساحة المستطيل  $OIMN$  هي  $1 \times f(1) = e$ ، إذاً مساحة الحيز  $B$  هي  $e - 1$ .  
للتعرف على الاحتمالات المطلوبة نرتب المساحات في الجدول التالي علماً انما متناسبة مع احتمالاتها.

الحيز	$A$	$B$	الاجمالي
المساحة	1	$e - 1$	$e$
الاحتمال	$\frac{1}{2e}$	$\frac{e-1}{2e}$	0.5

نضع  $a$  يساوي احتمال إصابة الجزء  $A$ . إذاً:  $\frac{1}{a} = \frac{e}{0.5}$  يكافئ  $a = \frac{1}{2e}$

احتمال إصابة الجزء  $B$  هو:  $0.5 - a$

2. أ- نختتم هنا بتجربة عشوائية ثلاث مرات ذات مخرجين:

"نصيب الجزء  $A$ " احتمالاً يساوي  $\frac{1}{2e}$ . "لانصيب الجزء  $A$ " احتمالاً  $1 - \frac{1}{2e}$

نعرف إذاً قانون الاحتمال للمتغير  $X$  هو قانون برنولي وسيطاه  $n=3$  و  $p = \frac{1}{2e}$ .

وبالتالي الأمل الرياضي للمتغير  $X$  هو:  $n \times p = \frac{3}{2e} \approx 0.552$

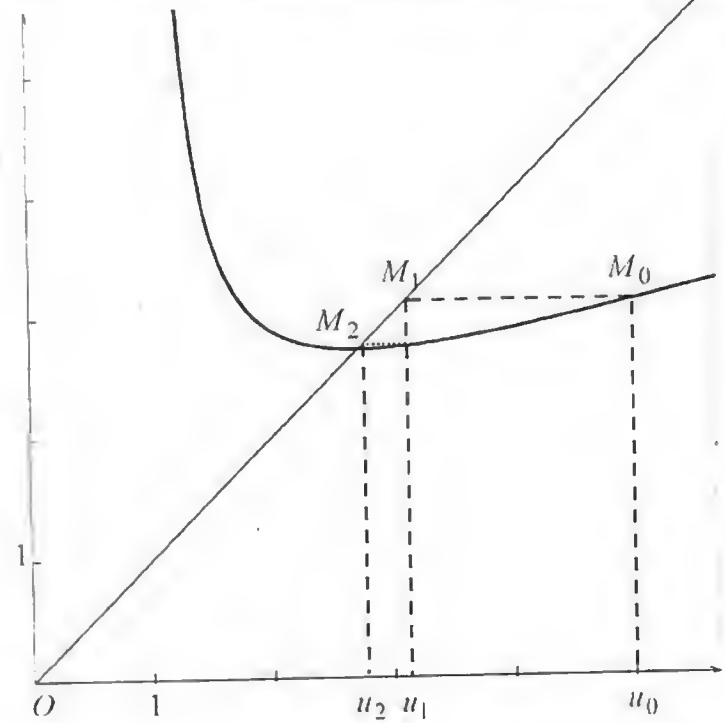
$$p(E) = p(X=2) = C_3^2 \left(\frac{1}{2e}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2e}\right) = \frac{3(2e-1)}{8e^3} \approx 0.083 \quad \text{ب-}$$

ج- نعتبر قانون برنولي وسيطاه  $n=3$  و  $p = \frac{e-1}{2e}$

$$p(F) = C_3^3 \left(\frac{e-1}{2e}\right)^3 = \frac{(e-1)^3}{8e^3}$$

نعتبر الحادثة  $G$  "ولا سهم اصاب خارج الهدف"

احتمال أن تصيب الأسهم الثلاثة الجزء  $B$  علماً أن ولا سهم اصاب خارج الهدف هو:



وبالتالي  $(u_n)$  متناقصة تماماً على  $N$  وهي محدودة من الأسفل بالعدد  $e$ ، فهي إذاً متقاربة نحو عدد حقيقي  $l$  حيث  $l \geq e$ .

الجزء B

1. لدينا  $u_{n+1} = f(u_n)$  وبالتالي  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right)$  كون  $f$

مستمرة على المجال  $]l; +\infty[$ . أي  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right) = f(l)$  منه  $f(l) = l$

2.  $f(l) = l$  يكافئ  $\frac{l}{\ln l} = l$  أي  $\ln l = 1$  يعني  $l = e$ .

التمرين 2 (6نقط)

الجزء الأول

$$\int_0^1 x e^x dx \quad \text{نضع} \quad \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases} \quad \text{يتبع أن} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$$

بما أن الدالتين  $u$  و  $v$  تقبلان الاشتقاق والدالتين  $u'$  و  $v'$  مستمرتين فإن:

طرف من طرف.

يعني أن  $(e-f)(e+f-2)=0$  معناه  $e+f=2=a$  إذا الرباعي  $OEAF$  متوازي أضلاع  
و علما أن  $|e|=|f|=2$  فإن الرباعي  $OEAF$  معين.

5. أ- إذا كانت  $M'(z')$  صورة  $M(z)$  بالدوران  $r$  الذي مركزه  $O$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$ . فإن:

$$z' = iz$$

$$z_{E'} = iz_E = i(1 - i\sqrt{3}) = i + \sqrt{3}$$
 وبالتالي

ب-  $A'E' = |z_{E'} - z_{A'}| = |\sqrt{3} - i| = 2$  يعني أن النقطة  $E'$  تنتمي إلى الدائرة  $(C')$ .

$$e - d = 1 - i\sqrt{3} - 2 - 2i = -1 - i(2 + \sqrt{3})$$
 ج-

$$(\sqrt{3} + 2)(e' - d) = (\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} - 2 - i) = -1 - i(\sqrt{3} + 2)$$
 و

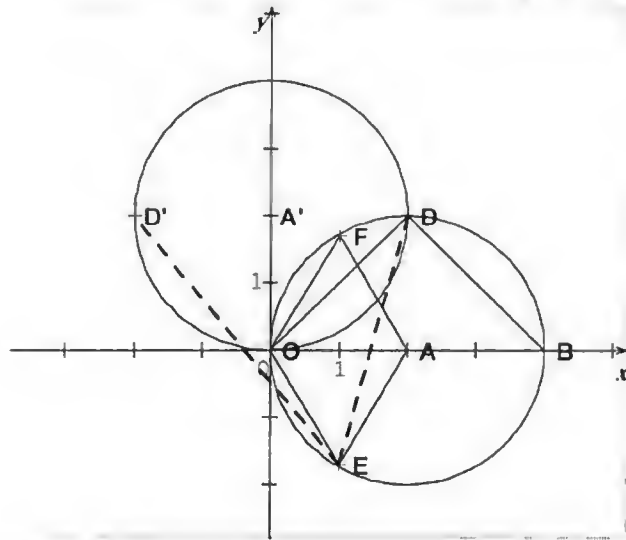
$$\overrightarrow{DE} = (\sqrt{3} + 2)\overrightarrow{DE'}$$
 من العلاقة  $e - d = (\sqrt{3} + 2)(e' - d)$  ينتج أن

يعني أن النقط  $E$ ،  $E'$  و  $D$  على استقامة واحدة.

6. لدينا مما سبق:  $E'$  هي صورة النقطة  $E$  بالدوران  $r$  وبما أن  $D'$  صورة النقطة  $D$  بالدوران  $r$

فإن صورة المستقيم  $(ED)$  الذي هو نفسه للمستقيم  $(EE')$  بالدوران  $r$ ، هو للمستقيم الذي يعامده  $(E'D')$ .

هذا يعني أن المثلث  $EE'D'$  قائم.



$$p_G(F) = \frac{p(F \cap G)}{p(G)} = \frac{(e-1)^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} \approx 0.253 \text{ ولدينا: } p_G(F)$$

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - C_n^0 \left(\frac{1}{2e}\right)^0 \left(\frac{e-1}{2e}\right)^n = 1 - \left(\frac{e-1}{2e}\right)^n \quad 3.$$

$$\left(\frac{e-1}{2e}\right)^n \leq 0.01 \text{ يكافئ } 1 - \left(\frac{e-1}{2e}\right)^n \geq 0.99 \text{ يكافئ } p_n \geq 0.99$$
 ب-

$$n \ln\left(\frac{e-1}{2e}\right) \leq \ln(0.01) \text{ أي}$$

$$\text{وبالتالي } n \geq \frac{\ln(0.01)}{\ln\left(\frac{e-1}{2e}\right)} \approx 22.7 \text{ أصغر قيمة للعدد } n \text{ هي } 23.$$

التمرين 3 (5 نقط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . وحدة القياس  $2cm$ .

$$1. \frac{z-4}{z} = i \text{ تكافئ } z-4 = iz \text{ و } z \neq 0 \text{ تكافئ } z = \frac{4}{1-i} = 2+2i$$

$$\text{و } z \neq 0 \text{ إذا: } S = \{2+2i\}$$

$$2. z^2 - 2z + 4 = 0 \text{ تكافئ } (z-1)^2 = -3 \text{ تكافئ } z_1 = 1 - i\sqrt{3}$$

$$\text{و } z_2 = 1 + i\sqrt{3} \text{ وبالتالي } S = \{z_1; z_2\}$$

$$z_1 = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ وكذلك } z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ إذا: } |z_1| = 2$$

$$\text{كون } z_2 = \overline{z_1}$$

$$3. \text{ لدينا حسب السؤال الأول } \frac{z-4}{z} = i \text{ من أجل } z = d \text{ نجد أن } \frac{d-b}{d-0} = i$$

$$\text{يعني } BD = OD \text{ و } \left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{BD}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ إذا المثلث } ODB \text{ قائم في } D \text{ ومتساوي الساقين.}$$

$$4. e \text{ و } f \text{ هما حلّي المعادلة } z^2 - 2z + 4 = 0 \text{ إذا: } (e^2 - 2e + 4 = 0)$$

$$\text{و } (f^2 - 2f + 4 = 0). \text{ ينتج أن } e^2 - f^2 - 2(e-f) = 0 \text{ باجراء الفرق}$$



1. نعتبر المستوي  $(P)$  الذي معادلته  $2x + 3y + 4z - 1 = 0$ .

أ- المسافة بين النقطة  $O$  والمستوي  $(P)$  هي:  $\frac{|-1|}{\sqrt{4+9+16}} = \frac{1}{\sqrt{29}}$  تساوي 1. (خطأ)

ب- المسافة بين النقطة  $O$  والمستوي  $(P)$  تساوي  $\frac{1}{\sqrt{29}}$ . (صحيح)

ج- الشعاع  $\vec{n}\left(1; \frac{3}{2}; 2\right)$  هو ناظم على المستوي  $(P)$ . (صحيح) كون

$$(P): x + \frac{3}{2}y + 2z - \frac{1}{2} = 0$$

د- المستوي  $(Q)$  الذي معادلته  $-5x + 2y + z = 0$  يوازي المستوي  $(P)$ . (خطأ)

كون الشعاع  $\vec{n}'(-5; 2; 1)$  هو ناظم على المستوي  $(Q)$  ولدينا  $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$  معناه  $(P)$  و  $(Q)$  متعامدان.

2. نعتبر المستوي  $(P)$  الذي معادلته  $2x + y - z = 0$ ، والمستقيم  $(D)$  الذي يشمل النقطة  $A(1; 1; 1)$  وشعاع توجيهه  $\vec{u}(1; -4; -2)$ .

أ- المستقيم  $(D)$  يوازي المستوي  $(P)$ . (صحيح) كون  $\vec{n}(2; 1; -1)$  شعاع ناظم على المستوي  $(P)$  يحقق  $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$  معناه  $\vec{n} \perp \vec{u}$ .

ب- المستقيم  $(D)$  يعامد المستوي  $(P)$ . (خطأ) كون  $\vec{n} \perp \vec{u}$ .

ج- المستقيم  $(D)$  يقطع المستوي  $(P)$ . (خطأ) كون  $(D)$  يوازي المستوي  $(P)$ ، و نقطة من  $(D)$  ولا تنتمي إلى  $(P)$ . أي  $(P)$  لا يحوي  $(D)$ .

د- تمثيل وسيطي للمستقيم  $(D)$  هو:  $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$  حيث  $t \in \mathbb{R}$  (صحيح) كون الجملة

$$\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$$

3.  $E$  تمثل مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  حيث:  $x + y + z = 3$  و  $2x - z = 1$ .

نعتبر النقطة  $A(1; 1; 1)$ .

أ- المجموعة  $E$  تضم نقطة واحدة وهي  $A$ . (خطأ) كون  $E$  هي تقاطع مستويين وفق مستقيم على الأقل.

ب- المجموعة  $E$  هي مستقيم يمر من  $A$ . (صحيح) كون  $E$  هي مستقيم تقاطع المستويين كلاهما يشملان  $A$ .

ج- المجموعة  $E$  هي مستوي يمر من  $A$ . (خطأ) حسب ما سبق

د- المجموعة  $E$  هي مستقيم شعاع توجيهه  $\vec{u}(1; -3; 2)$ . (صحيح) كون جملة معادلتي

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2} \\ y = -3t + \frac{5}{2} \\ z = 2t \end{cases} \quad \text{تكافئ} \quad \begin{cases} x + y = 3 - z \\ x = \frac{1 + z}{2} \end{cases}$$

وسيطي للمستقيم الذي شعاع توجيهه  $\vec{u}(1; -3; 2)$ .

4.  $ABCD$  رباعي وجوه.  $(P)$  المستوي الذي يمر من الرأس  $A$  ويعامد المستقيم  $(BC')$ .

أ- المستوي  $(P)$  يشمل دائما النقطة  $D$ . (خطأ) تعلل بمثال مضاد

ب- المستوي  $(P)$  يشمل دائما العمود  $(AH)$  للمثلث  $ABC$ . (صحيح) كون

$(AH)$  يعامد  $(BC)$  فهو إذا يوازي  $(P)$  ويشمل  $A$ .

ج- المستوي  $(P)$  هو دوما مجموعة النقط  $M$  من الفضاء التي تحقق

$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} \quad (\text{صحيح}) \text{ كون}$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \quad \text{أي} \quad (\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \quad \text{تكافئ} \quad \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$$

يعني أن:  $M$  تنتمي إلى المستوي الذي يشمل  $A$  ويعامد  $(BC')$ .

د- المستوي  $(P)$  هو دوما المستوي المحوري للقطعة المستقيمة  $[BC]$ . (خطأ) كون

الوجه  $(ABC)$  كفي، يعني الارتفاع  $[AH]$  ليس شرطا المتوسط في المثلث  $ABC$ .

عندما يظلم الفوج من السياح 10 أشخاص. غير عن احتمال أن يكون سائحاً سعيداً من بين العشرة.

### التمرين 2 (4 نقط)

المستوي المركب مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \bar{u}; \bar{v})$ . نعتبر النقطتين  $M$  و  $M'$  ذات الإحداثيتين على الترتيب  $z$  و  $z'$ . نضع:  $z = x + iy$  و  $z' = x' + iy'$  حيث:  $x, y, x', y'$  أعداد حقيقية.

1. بين أن الشعاعان  $\overline{OM}$  و  $\overline{OM'}$  متعامدان إذا وفقط إذا كان  $\text{Re}(z'\bar{z}) = 0$ .
2. بين أن النقط  $M, M', O$  على استقامة واحدة إذا وفقط إذا كان  $\text{Im}(z'\bar{z}) = 0$ .

تطبيق:

3.  $N$  النقطة ذات الإحداث  $(z^2 - 1)$ . ما هي مجموعة النقط  $M$  بحيث يكون الشعاعان  $\overline{OM}$  و  $\overline{ON}$  متعامدان؟

4. نفرض أن  $z \neq 0$ .  $P$  النقطة ذات الإحداث  $\left(\frac{1}{z^2} - 1\right)$ . نبحث عن مجموعة النقط

$M$  بحيث تكون النقط  $O, N, P$  على استقامة واحدة.

$$1- \text{بين أن: } \left(\frac{1}{z^2} - 1\right) \left(\overline{z^2 - 1}\right) = -z^2 \left|\frac{1}{z^2} - 1\right|^2$$

ب- باستعمال التكافؤ المبرهن عليه في بداية التمرين، تعرّف على المجموعة المطلوبة.

### التمرين 3 (5 نقط)

كل التمرين  $\lambda$  يرمز إلى عدد حقيقي من المجال  $]0; 1]$ .

1. نقترح دراسة الدوال القابلة للاشتقاق على المجال  $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$  والتي تحقق المعادلة

$$\text{التفاضلية } y' = y^2 + \lambda y \text{ (} E_\lambda \text{) والشرط } y(0) = 1.$$

نفرض وجود حلاً  $y_0$  للمعادلة  $(E_\lambda)$  موجب تماماً على المجال  $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$ ،

$$\text{ونضع على المجال } \left]-\infty; \frac{1}{2}\right] : z = \frac{1}{y_0}$$

اكتب معادلة تفاضلية بسيطة تحققها الدالة  $z$ .

2. سؤال من الدرس.

## الموضوع الثامن

بكالوريا علوم تجريبية --- سبتمبر 2006 --- فرنسا

### التمرين 1 (5 نقط)

تدور الأحداث على قمة جبال حجرية تطل على البحر. للذهاب إلى البحر قصد الاستحمام، على السياح اختيار أحد الشاطئين، علماً أن أحدهما يقع غرباً والآخر شرقاً.

A. يوجد سائح منذ يومين على قمة الجبل. يختار عشوائياً في اليوم الأول أحد الاتجاهين، ونعتبر أن احتمال اختياره في اليوم الثاني الاتجاه المعاكس للإتجاه الذي اختاره في اليوم الأول يساوي 0.8.

من أجل  $i = 1$  أو  $i = 2$  نضع:

$E_i$  الحادثة: "السائح يتجه نحو الشرق في اليوم  $i$ ."

$O_i$  الحادثة: "السائح يتجه نحو الغرب في اليوم  $i$ ."

1. ارسم شجرة الاحتمالات لوصف الوضعية.

2. عيّن الاحتمالات التالية:  $p(E_1)$ ،  $p_{E_1}(O_2)$ ،  $p(E_1 \cap E_2)$ .

3. ما احتمال أن يذهب هذا السائح إلى نفس الشاطئ ليومين متتاليين.

B. نفرض الآن أن  $n \geq 3$  سائح وجد يوماً على قمة هذا الجبل.

هؤلاء السياح كلهم يرغبون في الذهاب إلى الشاطئ وكلا منهم يختار عشوائياً وجهة من بين الوجهتين مستقل عن اختيار زميله. نسمي  $X$  المتغير العشوائي الذي يعطي عدد السواح المتجهون إلى الشرق.

1. عيّن احتمال أن يكون  $k$  سائح  $0 \leq k \leq n$  متجه نحو الشرق.

2. نفرض أن الشاطئ كانا في بداية اليوم فارغين تماماً. نقول عن سائح أنه سعيداً عندما يتواجد وحيداً على الشاطئ.

أ- هل يمكن أن يكون سائحان سعيدان؟

ب- بين أن احتمال أن يكون سائحاً سعيداً من بين  $n$  سائح هو:  $p = \frac{n}{2^{n-1}}$ .

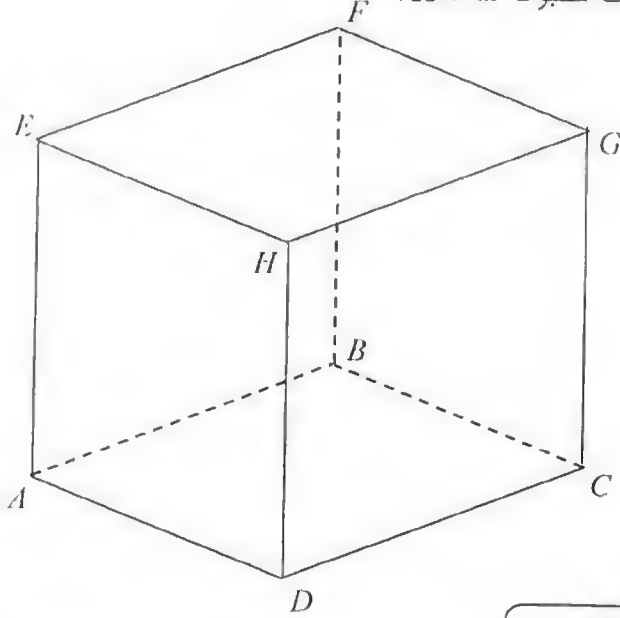
ج- تطبيق عددي:

5. نعتبر النقطة  $M$  من الفضاء إحداثياتها  $(x; y; z)$ .

أ- يبين أن  $M$  نقطة من  $\Delta$  إذا وفقط إذا كانت الثلاثية  $(x; y; z)$  حلا لجمله ثلاث معادلات خطية يطلب تعيينها. ما هي طبيعة  $\Delta$ ؟

ب- تحقق من أن  $P$  و  $Q$  نقطتان من  $\Delta$ . أرسم  $\Delta$  على الشكل المرفق.

6. أ- عيّن شعاعا ناظما على المستوي  $(IJK)$  واستنتج معادلة ديكارتية لهذا المستوي.  
ب- عيّن إذا الإحداثيات المضبوطة للنقطة  $\Omega$ .



### تصحيح الموضوع الثامن

بكالوريا علوم تجريبية --- سبتمبر 2006 --- فرنسا

التمرين 1 (5نقط)

نبدأ بترجمة المعطيات:

A. السائح يختار عشوائيا في اليوم الأول إحدى الوجهتين. يعني أن  $p(E_1) = p(O_1) = \frac{1}{2}$

في اليوم الثاني يختار وجهة معاكسة للوجهة المختارة في اليوم الأول ولدينا:

$$p_{O_1}(O_2) = p_{E_1}(E_2) = 1 - 0.8 = 0.2 \quad \text{وبالتالي:} \quad p_{O_1}(E_2) = p_{E_1}(O_2) = 0.8$$

1. شجرة الاحتمالات:

حلول المعادلة التفاضلية  $y' = -\lambda y$  هي الدوال  $x \mapsto C e^{-\lambda x}$  حيث  $C$  ثابت حقيقي.

أ- بين وجود ووحيدة الحل  $z$  للمعادلة التفاضلية  $z' = -(\lambda z + 1)$  حيث  $z(0) = 1$   
ب- أعط عبارة هذه الدالة ونرمز لها  $z_0$ .

3. نريد الآن أن نبين أن الدالة  $z_0$  لا تنعدم في المجال  $]-\infty; \frac{1}{2}]$ .

أ- يبين أن  $\ln(\lambda + 1) > \frac{\lambda}{\lambda + 1}$ . (يمكننا دراسة الدالة  $f$  المعرفة بالدستور:

$$f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1} \quad \text{على } ]0; 1[$$

ب- استنتج أن  $\frac{1}{\lambda} \ln(\lambda + 1) > \frac{1}{2}$

4. استنتج أن الدالة  $z_0$  لا تنعدم في المجال  $]-\infty; \frac{1}{2}]$ .

بين إذا أن المعادلة  $(E_R)$  تقبل حلا موجبا تماما على المجال  $]-\infty; \frac{1}{2}]$  يطلب تعيينه.

التمرين 4 (6 نقط)

$ABCDEFGH$  مكعبا طول حرفه  $3cm$ , (الشكل في نهاية التمرين).

نعتبر  $I$  مرجح الجملة المثقلة  $\{(E; 2); (F; 1)\}$  و  $J$  مرجح الجملة المثقلة  $\{(B; 2); (F; 1)\}$  و  $K$  مرجح الجملة المثقلة  $\{(G; 2); (C; 1)\}$ .

نهدف إلى تعيين مجموعة النقاط  $M$  من الفضاء المتساوية البعد عن النقاط  $I, J$  و  $K$ . نرمز لهذه المجموعة بـ  $\Delta$

1. ضع النقاط  $I, J$  و  $K$  على الشكل المرفق.

2. نعتبر  $\Omega$  النقطة من  $\Delta$  الواقعة في المستوي  $(IJK)$ . ماذا تمثل هذه النقطة بالنسبة للمثلث  $IJK$ ؟

في بقية التمرين نعتبر في الفضاء المعلم  $\left(A; \frac{1}{3} \overline{AD}; \frac{1}{3} \overline{AB}; \frac{1}{3} \overline{AE}\right)$  المتعامد والمتجانس.

3. أعط إحداثيات النقاط  $I, J$  و  $K$ .

4. نعتبر النقطتين  $P(2; 0; 0)$  و  $Q(1; 3; 3)$  يطلب وضعهما على الرسم. بين أن

المستقيم  $(PQ)$  عمودي على المستوي  $(IJK)$ .

ب- حادثة " سائحا واحدا سعيدا " هي:  $[ (X=1) \text{ أو } (X=n-1) ]$

$$p(X=1) + p(X=n-1) = \frac{C_n^1}{2^n} + \frac{C_n^{n-1}}{2^n} = \frac{n+n}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

ج- من أجل  $n=10$

$$p(X=1) + p(X=9) = \frac{10}{2^9} \approx 0.019 \text{ هو: العشرة من بين العشرة هو:}$$

التمرين 2 ( 4 نقط )

المستوي المركب مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . نعتبر النقطتين  $M'$  و  $M$  ذات اللاحقتين على الترتيب  $\bar{z}$  و  $z'$ . نضع:  $z = x + iy$  و  $z' = x' + iy'$  حيث:  $x, y, x', y'$  أعداد حقيقية.

1. لدينا  $\overline{OM}(x; y)$  و  $\overline{OM'}(x'; y')$  ولدنيا:

$$z'\bar{z} = (x' + iy')(x - iy) = (xx' + yy') + i(xy' - yx')$$

$$\text{إذا: } \text{Im}(z'\bar{z}) = xy' - yx' \text{ و } \text{Re}(z'\bar{z}) = xx' + yy'$$

وبالتالي:  $\overline{OM}$  و  $\overline{OM'}$  متعامدان معناه  $xx' + yy' = 0$  أي  $\text{Re}(z'\bar{z}) = 0$

2. النقط  $M, M'$  و  $O$  على استقامة واحدة معناه محدد الشعاعين  $\overline{OM}$  و  $\overline{OM'}$  معلوم

$$\text{أي } \text{Im}(z'\bar{z}) = 0 \text{ يعني أن } xy' - yx' = 0$$

تطبيق:

3.  $N$  النقطة ذات اللاحقة  $(z^2 - 1)$ .

بمجموعة النقط  $M$  بحيث يكون الشعاعان  $\overline{OM}$  و  $\overline{ON}$  متعامدان؟

حسب السؤال الأول. الشعاعان  $\overline{OM}$  و  $\overline{ON}$  متعامدان إذا وفقط إذا كان  $\text{Re}((z^2 - 1)\bar{z}) = 0$

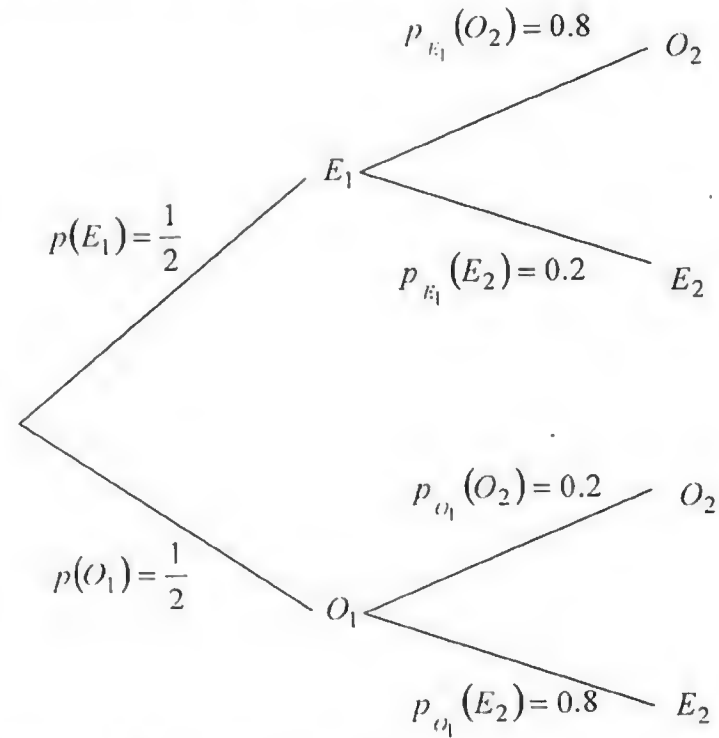
$$\text{ولدينا } \text{Re}((z^2 - 1)\bar{z}) = \text{Re}(z^2\bar{z} - \bar{z}) = \text{Re}(z^2\bar{z}) - \text{Re}(\bar{z}) = \text{Re}(z \times |z|^2) - \text{Re}(z)$$

$$\text{كون: } \text{Re}(\bar{z}) = \text{Re}(z) \text{ و } z\bar{z} = |z|^2$$

$$\text{وبالتالي: } \text{Re}((z^2 - 1)\bar{z}) = (|z|^2 - 1)\text{Re}(z)$$

$$\text{إذا: } \text{Re}((z^2 - 1)\bar{z}) = 0 \text{ يكافئ: } (|z|^2 - 1 = 0 \text{ أو } \text{Re}(z) = 0)$$

$$\text{أي } (|z| = 1 \text{ أو } \text{Re}(z) = 0) \text{ يكافئ: } (x^2 + y^2 = 1 \text{ أو } x = 0)$$



$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \times p_{E_1}(E_2) = \frac{1}{2} \times 0.2 = 0.1$$

3. حادثة: " أن يذهب إلى نفس الشاطئ ليومين متتاليين ":  $(E_1 \cap E_2) \cup (O_1 \cap O_2)$

$$\text{وبالتالي: } p[(E_1 \cap E_2) \cup (O_1 \cap O_2)] = p(E_1 \cap E_2) + p(O_1 \cap O_2) = 0.1 + 0.1 = 0.2$$

B. نفرض الآن أن  $n \geq 3$  سائح وجد يوما على قمة الجبل المذكور.

1. المتغير العشوائي  $X$  يتبع قانون ثنائي الحد وسيطاه  $n$  و  $p = 0.5$

$$\text{إذا: } p(X = k) = C_n^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{C_n^k}{2^n}$$

2. أ- لا يمكن أن يكون سائحان سعيدان معا. كون شرط السعادة هو

التواجد وحيدا على الشاطئ.

مجموعة النقط هي اتحاد الدائرة التي مركزها  $O$  ونصف قطرها 1 مع حامل عمود الترتيب.

4. نفرض أن  $z \neq 0$ .  $P$  النقطة ذات اللاحقة  $\left(\frac{1}{z^2} - 1\right)$ .

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{z^2} - 1\right) \left(\overline{\frac{1}{z^2} - 1}\right) &= \left(\frac{1}{z^2} - 1\right) \times \left(\overline{\frac{1}{z^2}}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{z^2}\right) \\ &= -\left(\overline{z}\right)^2 \left(\frac{1}{z^2} - 1\right) \times \left(\frac{1}{z^2} - 1\right) = -\left(\overline{z}\right)^2 \left|\frac{1}{z^2} - 1\right|^2 \end{aligned}$$

ب- حسب السؤال السابق لدينا: النقط  $O$ ،  $N$  و  $P$  على استقامة واحدة إذا وفقط

إذا كان  $\operatorname{Im}\left[\left(\frac{1}{z^2} - 1\right) \left(\overline{\frac{1}{z^2} - 1}\right)\right] = 0$

يكافئ  $\operatorname{Im}\left[-\left(\overline{z}\right)^2 \left|\frac{1}{z^2} - 1\right|^2\right] = 0$  يكافئ  $\left|\frac{1}{z^2} - 1\right|^2 \operatorname{Im}\left(-\left(\overline{z}\right)^2\right) = 0$

أي  $\left(\operatorname{Im}\left(-\left(\overline{z}\right)^2\right) = 0\right)$  أو  $\left|\frac{1}{z^2} - 1\right|^2 = 0$  يكافئ  $(2xy = 0)$  أو  $(z^2 = 1)$

يكافئ  $(x = 0)$  أو  $(y = 0)$ . مجموعة النقط هي اتحاد حاملي محوري الاحداثيات.

التمرين 3 (5 نقط)

$\lambda$  عدد حقيقي من المجال  $]0;1[$ .

$y_0$  حلا للمعادلة  $(E_\lambda)$  ويحقق:  $y_0(0) = 1$

1. لدينا  $z = \frac{1}{y_0}$  يعني أن  $y_0 = \frac{1}{z}$ ، الدالتين  $y_0$  و  $z$  تقبلان الاشتقاق على

المجال  $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$ . ولدينا:  $(y_0)' = -\frac{z'}{z^2}$  أي  $y_0'^2 + \lambda y_0 = -\frac{z'}{z^2}$

يعني أن  $\left(\frac{1}{z}\right)^2 + \lambda \left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{z'}{z^2}$  يكافئ  $z' = -(1 + \lambda z)$

هذا يعني أن  $z$  حلا للمعادلة التفاضلية  $Y' = -(1 + \lambda Y)$ .

2. نعلم من الدرس أن حلول المعادلة التفاضلية  $y' = -\lambda y$  هي الدوال  $x \mapsto C e^{-\lambda x}$

حيث  $C$  ثابت حقيقي.

أ- لدينا حلا خاصا للمعادلة التفاضلية  $(E'_\lambda): z' = -(\lambda z + 1)$  وهي الدالة الثالثة

$Z = -\frac{1}{\lambda}$  وضوحاً.

إذاً نعطي شكلاً آخر للمعادلة  $(E'_\lambda)$ :

$z$  يحقق المعادلة  $(E'_\lambda)$  يكافئ  $z' + \lambda z = -1$  أي  $z' + \lambda z = Z' + \lambda Z$

يكافئ  $(z - Z)' = -\lambda(z - Z)$  يعني أن الدالة  $(z - Z)$  حلا للمعادلة التفاضلية  $y' = -\lambda y$ .

وبالتالي:  $z - Z = C e^{-\lambda x}$  حيث  $C$  ثابت حقيقي. أي  $z = C e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}$

بما أن  $z(0) = 1$  فإن  $C e^{-\lambda \times 0} - \frac{1}{\lambda} = 1$  أي  $C = \frac{1 + \lambda}{\lambda}$  ومنه واحدة الحل.

يوجد إذاً حلاً واحداً  $z$  للمعادلة التفاضلية  $(E'_\lambda): z' = -(\lambda z + 1)$  حيث

$z(0) = 1$  وهو:  $z = \frac{1 + \lambda}{\lambda} e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}$

ب- هذا الحل الوحيد هو الدالة  $z_0 = \frac{1 + \lambda}{\lambda} e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}$

3. نريد الآن أن نبين أن الدالة  $z_0$  لا تنعدم في المجال  $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$ .

أ- نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $]0;1[$  بالدستور  $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$

من أجل كل  $x$  من المجال  $]0;1[$ ،  $f''(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2} > 0$

يعني أن  $f$  متزايدة تماماً على  $]0;1[$ .

بما أن  $f(0) = 0$  و  $f$  متزايدة تماماً على  $]0;1[$  فإنه من أجل كل  $x$  من المجال  $]0;1[$ ،

$f(x) > 0$

أي  $\ln(x+1) > \frac{x}{x+1}$  من أجل كل  $x$  من المجال  $]0;1[$ . يعني أن  $\ln(\lambda+1) > \frac{\lambda}{\lambda+1}$

كون  $\lambda \in ]0;1[$ .

ب- بما أن  $\lambda \in ]0;1[$  فإن  $\frac{\lambda}{\lambda+1} > \frac{\lambda}{2}$

إذاً: من أجل كل  $\lambda$  من المجال  $[0;1]$ .  $\ln(\lambda+1) > \frac{\lambda}{\lambda+1}$  تكافئ  $\ln(\lambda+1) > \frac{\lambda}{2}$

$$\cdot \frac{1}{\lambda} \ln(\lambda + 1) > \frac{1}{2} \quad \text{أي}$$

4. من أجل  $\lambda \in ]0;1]$  ، لدينا الدالة  $z_0 = \frac{1+\lambda}{\lambda} e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}$  متناقصة تماما على

2.  $\Omega$  النقطة من  $\Delta$ . يعني أن  $\Omega$

تبعد بنفس البعد عن النقط  $J, I$  و  $K$ .

وبما أن  $\Omega$  تنتمي إلى المستوى  $(IJK)$ ،

فإن  $\Omega$  هي مركز الدائرة

المحيطه بالمثلث  $IJK$ .

2.  $\Omega$  النقطة من  $\Delta$ . يعني أن  $\Omega$  تبعد بنفس البعد عن النقط  $I, J, K$ .  
وبما أن  $\Omega$  تنتمي إلى المستوي  $(IJK)$ ،  
فإن  $\Omega$  هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث  $IJK$ .

نعتبر الثلاثية  $\left(A; \frac{1}{3}\overline{AD}; \frac{1}{3}\overline{AB}; \frac{1}{3}\overline{AE}\right)$   
معلم للفضاء متعامد ومتجانس.

نعتبر الثلاثية  $\left(A; \frac{1}{3}\overline{AD}; \frac{1}{3}\overline{AB}; \frac{1}{3}\overline{AE}\right)$

معلم للفضاء متعامد ومتجانس.

3. نعين أحداثيات رؤوس المكعب.  $A(0;0;0)$ ,  $B(0;3;0)$ .

$$H(3;0;3), G(3;3;3), F(0;3;3), E(0;0;3), D(3;0;0), C(3;3;0)$$

معناه  $J = \{(B; 2), (F; 1)\}$   $I(0; 1; 3)$  معناه  $I = \{(F; 2), (F; 1)\}$  .

•  $K(3;3;2)$  معناه  $K = \{(G;2); (C;1)\}$

4. نعتبر النقطتين  $P(2;0;0)$  و  $Q(1;3;3)$

$\overline{IK}(3;2;-1)$  ،  $\overline{IJ}(0;2;-2)$  ،  $\overline{PQ}(-1;3;3)$  لدينا:

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{IK} = -3 + 6 - 3 = 0 \text{ و } \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0 + 6 - 6 = 0$$

وَمَا أَنْ:  $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{IJ}$  و  $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{IK}$ . وبالتالي المستقيم  $(PQ)$  عمودي على المستوي  $(IJK)$ .

5. نعتبر النقطة  $M$  من الفضاء إحداثياتها  $(x; y; z)$ .

أ-  $M$  نقطة من  $\Delta$  معناه  $MI = MJ = MK$

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = x^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 \\ x^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} MI = MJ \\ MI = MK \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} y - z = 0 \\ 3x + 2y - z = 6 \end{cases}$$

ينتج أن  $\Delta$  هي عبارة عن المستقيم المعين بالتمثيل الديكارتي  $\begin{cases} y - z = 0 \\ 3x + 2y - z = 6 \end{cases}$

والذي هو تقاطع المستويين المحوريين للقطعتين  $[IJ]$  و  $[IK]$

ب- نعوض إحداثيات كلا من  $P$  و  $Q$  في التمثيل الديكارتي  $\begin{cases} y - z = 0 \\ 3x + 2y - z = 6 \end{cases}$

للمستقيم  $\Delta$ . نجد أنهما تحققان.

إذاً:  $P$  و  $Q$  نقطتان من  $\Delta$ .

6. أ- حسب ما سبق الشعاع  $\overrightarrow{PQ}$  يعامد المستوي  $(IJK)$ . فهو شعاع ناظم له.

بما أن  $\overrightarrow{PQ}(-1; 3; 3)$  فإن المستوي  $(IJK)$  له معادلة من الشكل:  $-x + 3y + 3z + d = 0$ .

لإيجاد قيمة  $d$  نعوض إحداثيات  $I(0; 1; 3)$  في المعادلة كون  $I \in (IJK)$  نجد:

$$0 + 3 + 9 + d = 0 \text{ أي } d = -12 \text{ وبالتالي معادلة المستوي } (IJK) \text{ هي:}$$

$$-x + 3y + 3z - 12 = 0: (IJK).$$

ب- النقطة  $\Omega$  تنتمي إلى المستقيم  $\Delta$  و إلى المستوي  $(IJK)$ ، إذاً إحداثياتها هي حلول الجملة:

$$\begin{cases} x = \frac{24}{19} \\ y = \frac{42}{19} \\ z = \frac{42}{19} \end{cases} \text{ أي } \Omega\left(\frac{24}{19}; \frac{42}{19}; \frac{42}{19}\right) \text{ وبالتالي نجد } \begin{cases} y - z = 0 \\ 3x + 2y - z = 6 \\ -x + 3y + 3z - 12 = 0 \end{cases}$$

## الموضوع التاسع

بكالوريا علوم تجريبية ----- جوان 2007 ----- المغرب

التمرين 1 (3 نقط)

نعتبر  $(S)$  سطح الكرة معادلته:  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 8 = 0$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 8 = 0$$

و  $(P)$  المستوي الذي معادلته:  $x - y + 2z + 1 = 0$

1. بين أن  $(S)$  مركزها  $\Omega(1; 2; 3)$  ونصف قطرها  $\sqrt{6}$ .

2. تحقق من أن المستوي  $(P)$  مماس لسطح الكرة  $(S)$ .

3. أ) حدّد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم الذي يشمل النقطة  $\Omega$  والعمودي على المستوي  $(P)$ .

ب) حدّد إحداثيات نقطة تماس  $(P)$  و  $(S)$ .

التمرين 2 (3 نقط)

1. أ) اكتب على الشكل الجبري العدد المركّب  $(3 - 2i)^2$ .

ب) حل في مجموعة الأعداد المركّبة  $C$  المعادلة:  $z^2 - 2(4 + i)z + 10 + 20i = 0$ .

2. نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(\Omega; \vec{u}; \vec{v})$ ، النقط

$A$ ،  $B$  و  $C$  والتي لواحقتها على الترتيب هي:  $a = 1 + 3i$ ،  $b = 7 - i$  و  $c = 5 + 9i$

$$\text{ب) بين أن: } \frac{c - a}{b - a} = i$$

ت) استنتج أن المثلث  $ABC$  قائم ومتساوي الساقين.

التمرين 3 (2.5 نقط)

$$1. \text{ تحقق أنه من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R} - \{-1\}, \frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

$$2. \text{ بين أن: } \int_0^2 \frac{x^2}{x+1} dx = \ln 3$$

$$3. \text{ باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن: } \int_0^2 x \ln(x+1) dx = \frac{3}{2} \ln 3$$

التمرين 4 (2.5 نقط)



5. أنشئ  $(\Delta)$  و  $(C_r)$ . ( نأخذ  $\frac{1}{1-e} \approx -0.6$  )

III. نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية  $N$  بـ:

$$u_0 = 1 \text{ و } u_{n+1} = f(u_n)$$

1. بين بالتراجع أنه: من أجل كل  $n$  من  $N$ ،  $0 \leq u_n \leq 1$ .

2. بين أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما على  $N$ .

3. استنتج أن  $(u_n)$  متقاربة، ثم حدد نهايتها.

### تصحيح الموضوع التاسع

بكالوريا علوم تجريبية ---- جوان 2007 ---- المغرب

التمرين 1 (4 نقط)

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم للفضاء متعامد ومتجانس.

1.  $M(x; y; z) \in (S)$  يكافئ  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 8 = 0$

يكافئ  $x^2 + -2x + 1 - 1 + y^2 - 4y + 4 - 4 + z^2 - 6z + 9 - 9 + 8 = 0$

يكافئ  $\Omega(1; 2; 3) = \sqrt{6}$  أي  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{6}^2$  حيث  $\Omega(1; 2; 3)$

إذا:  $(S)$  مركزها  $\Omega(1; 2; 3)$  ونصف قطرها  $\sqrt{6}$ .

2. المسافة بين المركز  $\Omega$  والمستوي  $(P)$  هي:  $\frac{|1 - 2 + 2(3) + 1|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \sqrt{6}$

إذا  $(P)$  مماس لسطح الكرة  $(S)$ .

3. نسمي  $(\Delta)$  المستقيم الذي يشمل  $\Omega$  والعمودي على  $(P)$ ، ولدينا  $\vec{n}(1; -1; 2)$  شعاع

الناظم للمستوي  $(P)$ .

إذا:  $\vec{n}(1; -1; 2)$  شعاع توجيه للمستقيم  $(\Delta)$ . وبالتالي التمثيل الرسمي لـ  $(\Delta)$

يعطى بالجملة:  $\left\{ \begin{array}{l} x = 1 + k \\ y = 2 - k \\ z = 3 + 2k \end{array} \right.$  /  $k$  وسيط حقيقي.

$M(x; y; z) \in (\Delta) \cap (P)$  يكافئ  $M(x; y; z) \in (S) \cap (P)$

يحتوي كيس على سبع كرات تحمل الأرقام  $0; 0; 0; 0; 1; 1; 1; -1$  (لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس).

نعتبر التجربة العشوائية التالية: سحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من الكيس.

ونعتبر الحوادث التالية:  $A$ : "من بين الكرات الثلاث المسحوبة لا توجد أية كرة تحمل الرقم 0".

$B$ : "سحب ثلاث كرات تحمل أرقام مختلفة مثنى مثنى".

$C$ : "مجموع الأرقام المسجلة على الكرات الثلاث المسحوبة معدوم".

احسب احتمال تحقق كلا من الحادثين  $A$  و  $B$ ، ثم بين أن احتمال تحقق  $C$  هو:  $\frac{2}{7}$ .

المسألة (9 نقط)

1. نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة على  $R$  بالدستور:  $g(x) = e^{-x} + x - 1$ .

1. أحسب العدد  $g'(x)$  لكل  $x$  من  $R$ ، ثم استنتج أن  $g$  متزايدة تماما على  $[0; +\infty[$

ومتناقصة تماما على  $] -\infty; 0]$ .

2. بين أنه من أجل كل  $x$  من  $R$ ،  $g(x) \geq 0$  (لاحظ أن  $g(0) = 0$ )

II. نعتبر الدالة العددية  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة بالدستور:  $f(x) = \frac{x}{x + e^{-x}}$

وليكن  $(C_r)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. بين أن مجموعة تعريف الدالة  $f$  هي  $R$ .

2. أ) بين أنه: من أجل كل  $x$  من  $R^*$ ،  $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^{-x}}}$ .

ب) بين أن:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ . ثم فسّر هندسيا النتيجة.

3. أ) بين أنه: من أجل كل  $x$  من  $R$ ،  $f'(x) = \frac{(x+1)e^{-x}}{(x + e^{-x})^2}$ .

ب) ادرس إشارة العدد  $f'(x)$ ، ثم ضع جدول تغيرات الدالة  $f$ .

4. أ) أكتب معادلة المماس للمنحنى  $(C_r)$  عند المبدأ  $O$ .

ب) تحقق من أنه: من أجل كل  $x$  من  $R$ ،  $x - f(x) = \frac{xg(x)}{g(x) + 1}$ ، ثم ادرس إشارة

$(x - f(x))$  على  $R$ .

ج) استنتج الوضع النسبي للمنحنى  $(C_r)$  والمستقيم  $(\Delta)$  ذي المعادلة  $y = x$ .

3. نضع:  $\begin{cases} u(x) = \ln(x+1) \\ v'(x) = x \end{cases}$  ينتج أن  $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x+1} \\ v(x) = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$  بما أن الدالتان  $u$  و  $v$

مستمرتان وقابلتان للإشتقاق على  $[0, 2]$  فحسب قاعدة المكاملة بالتجزئة نجد:

$$\int_0^2 x \ln(x+1) dx = \int_0^2 u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_0^2 - \int_0^2 v(x)u'(x) dx$$

$$= \left[ \frac{1}{2}x^2 \ln(x+1) \right]_0^2 - \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{x^2}{x+1} dx = 2 \ln 3 - \frac{1}{2} \ln 3 = \frac{3}{2} \ln 3$$

التمرين 4



نسمى  $(\Omega; p)$  فضاء احتمالي منته. لدينا:  $Card(\Omega) = C_7^3 = 35$

حساب احتمال الحوادث:

A: "من بين الكرات الثلاث المسحوبة لا توجد أية كرة تحمل الرقم 0".

$$p(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{C_4^3}{35} = \frac{4}{35}$$

B: "سحب ثلاث كرات تحمل أرقام مختلفة مثنى مثنى".

$$p(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{C_3^1 \times C_1^1 \times C_3^1}{35} = \frac{9}{35}$$

C: "بمجموع الأرقام المسحولة على الكرات الثلاث المسحوبة معدوم".

$$p(C) = \frac{Card(C)}{Card(\Omega)} = \frac{C_3^3 + (C_3^1 \times C_1^1 \times C_3^1)}{35} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$$

المسألة

1.  $g(x) = e^{-x} + x - 1$  معرفة على  $\mathbb{R}$ .

1. من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $g'(x) = -e^{-x} + 1$  ندرس اشارته.

$g'(x) = 0$  يكافئ  $e^{-x} = 1$  أي  $x = 0$ .

في المجال  $[0; +\infty[$  لدينا  $x \geq 0$  أي  $-x \leq 0$  منه  $e^{-x} \leq 1$  أي  $g'(x) \geq 0$

أي  $\begin{cases} x = 1+k \\ y = 2-k \\ z = 3+2k \end{cases} / k$  وسيط حقيقي.

يكافئ:  $(1+k) - (2-k) + 2(3+2k) + 1 = 0$  أي  $k = -1$

وبالتالي:  $M(0; 3; 1)$  نقطة تماس  $(P)$  و  $(S)$ .

التمرين 2 (5 نقط)

1.  $(3-2i)^2 = 9 - 12i - 4 = 5 - 12i$

ب) المميز المختصر للمعادلة  $z^2 - 2(4+i)z + 10 + 20i = 0$  (E):

هو  $\Delta' = (4+i)^2 - (10 + 20i) = 5 - 12i = (3-2i)^2$

إذاً: حلّي المعادلة (E) هما:  $z_1 = \frac{4+i+3-2i}{1} = 7-i$  و  $z_2 = \frac{4+i-3+2i}{1} = 1+3i$

وبالتالي مجموعة الحلول هي:  $S = \{7-i; 1+3i\}$

2. في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{v})$ .

أ)  $\frac{c-a}{b-a} = \frac{(5+9i) - (1+3i)}{(7-i) - (1+3i)} = \frac{4+6i}{6-4i} = \frac{i(6-4i)}{6-4i} = i$

ب)  $\left| \frac{c-a}{b-a} \right| = |i| = 1$  أي  $\frac{AC}{AB} = 1$  يعني  $AC = AB$  ولدينا كذلك

$$(\overline{AB}; \overline{AC}) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) + 2k\pi$$

أي  $(\overline{AB}; \overline{AC}) = \arg(i) + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$   $k$  عدد صحيح.

ينتج أن المثلث  $ABC$  قائم في  $A$  ومتساوي الساقين.

التمرين 3 (2.5 نقط)

1. من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R} - \{-1\}$ ،  $\frac{x^2}{x+1} = \frac{x^2-1+1}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} + \frac{1}{x+1} = x-1 + \frac{1}{x+1}$

2.  $\int_0^2 \left( x-1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = \left[ \frac{1}{2}x^2 - x + \ln(x+1) \right]_0^2 = \ln 3$

ب- إشارة  $f'(x)$  هي إشارة العدد  $(x+1)$  وبالتالي نضع الإشارة في جدول التغيرات

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$f'(x)$		$0$	$+$
في الشكل المقابل:			
$f(x)$	$0^-$	$\frac{1}{1-e}$	$1$

4. أ- معادلة المماس للمنحني  $(C_f)$  عند المبدأ  $O$ .

$$y = x \quad y = f'(0)(x-0) + f(0) \quad \text{أي:}$$

ب- من أجل كل  $x$  من  $R$ ,

$$x - f(x) = x - \frac{x}{x+e^{-x}} = x \left( 1 - \frac{1}{x+e^{-x}} \right) = x \frac{x-1+e^{-x}}{x+e^{-x}} = \frac{xg(x)}{g(x)+1}$$

بما أنه: من أجل كل  $x$  من  $R$ ,  $g(x) \geq 0$  (حسب ما سبق) فإن:

إشارة  $(x - f(x))$  هي إشارة  $x$  على  $R$ . حسب الجدول التالي:

$x$	$0$	$+\infty$
$(x - f(x))$	$-$	$+$

ج- تعرف على وضعية  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته  $y = x$  من

خلال إشارة الفرق  $(x - f(x))$ .

حسب السؤال السابق لدينا:  $(C_f)$  يقطع  $(\Delta)$  عند النقطة ذات الفاصلة  $0$ .

$(C_f)$  يقع فوق  $(\Delta)$  على المجال  $]-\infty; 0[$  و  $(C_f)$  يقع تحت  $(\Delta)$  على

المجال  $]0; +\infty[$ .

يعني أن  $g$  متزايدة تماماً على  $]0; +\infty[$ .

في المجال  $]0; +\infty[$  لدينا  $x \leq 0$  أي  $-x \geq 0$  منه  $e^{-x} \geq 1$  أي  $g'(x) \leq 0$

يعني أن  $g$  متناقصة تماماً على  $]0; +\infty[$ .

2. من أجل كل  $x$  من  $R_+$ ,  $x \geq 0$  منه  $g(x) \geq g(0)$  أي  $g(x) \geq 0$ .

(كون  $g$  متزايدة تماماً على  $]0; +\infty[$ )

من أجل كل  $x$  من  $R_-$ ,  $x \leq 0$  منه  $g(x) \geq g(0)$  أي  $g(x) \geq 0$ .

(كون  $g$  متناقصة تماماً على  $]0; +\infty[$ ). إذاً من أجل كل  $x$  من  $R$ ,  $g(x) \geq 0$

II. نعتبر الدالة العددية  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة بالدستور:  $f(x) = \frac{x}{x+e^{-x}}$

1.  $f$  معرفة إذا وفقط إذا كان  $x+e^{-x} \neq 0$ . لدينا مما سبق، من أجل كل  $x$  من  $R$ ,

$$g(x) \geq 0$$

$$\text{أي } e^{-x} + x - 1 \geq 0 \quad \text{إذاً: } e^{-x} + x \geq 1 \quad \text{وبالتالي: } D_f = R$$

$$2. \text{ أ- من أجل كل } x \text{ من } R^*, \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}} = \frac{1}{\frac{xe^x + 1}{xe^x}} = \frac{xe^x}{xe^x + 1} = \frac{x}{x + e^{-x}} = f(x)$$

$$\text{ب- } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{xe^x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty \text{ كون } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}} \right) = 1$$

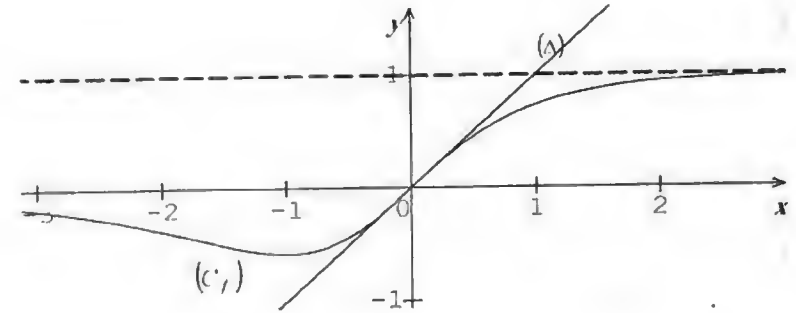
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{xe^x} = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0^- \text{ كون } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}} \right) = 0^-$$

نستنتج من هذا الحساب أن المنحني  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب بجوار  $+\infty$  معادلته

$$y = 1 \text{ و مستقيم مقارب بجوار } -\infty \text{ معادلته } y = 0.$$

3. أ- من أجل كل  $x$  من  $R$ ,

$$f'(x) = \frac{(x)'(x+e^{-x}) - x(x+e^{-x})'}{(x+e^{-x})^2} = \frac{x+e^{-x} - x(1-e^{-x})}{(x+e^{-x})^2} = \frac{(x+1)e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}$$

5. رسم  $(\Delta)$  و  $(C_f)$ .III. المتتالية العددية المعرفة على  $N$  بـ:  $u_0 = 1$  و  $u_{n+1} = f(u_n)$ .1. من أجل  $n=0$  لدينا  $u_0 = 1$  أي  $0 \leq u_0 \leq 1$  محققة.نفرض أن  $0 \leq u_k \leq 1$  محققة إلى الرتبة  $k$  ونبين أن  $0 \leq u_{k+1} \leq 1$  محققة.لدينا:  $0 \leq u_k \leq 1$  منه  $f(0) \leq f(u_k) \leq f(1)$  كون  $f$  متزايدة بالخصوص على  $[0;1]$ .وبما أن  $(C_f)$  يقع تحت  $(\Delta)$  على الخصوص في المجال  $[0;1]$ . فإن  $f(1) \leq 1$  ينتج أن: $0 \leq u_{k+1} \leq 1$  وهو المطلوبإذاً من أجل كل  $n$  من  $N$ ،  $0 \leq u_n \leq 1$ .2. مما سبق لدينا: من أجل كل  $x$  من  $[0;1]$ ،  $f(x) \leq x$  (من دراسة الوضعية النسبية)ومن السؤال السابق لدينا: من أجل كل  $n$  من  $N$ ،  $0 \leq u_n \leq 1$ .بما أن  $u_n \in [0;1]$  فإن  $f(u_n) \leq u_n$  من أجل كل  $n$  من  $N$ ، أي:

$$u_{n+1} \leq u_n$$

يعني أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماماً على  $N$ .3. بما أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماماً على  $N$  ومحدودة من الأسفل بالعدد 0، فإنهامتقاربة نحو العدد  $l$ ، حيث  $l \geq 0$ .

## الموضوع العاشر

بكالوريا علوم تجريبية ----- جوان 2007 ----- فرنسا

التمرين 1 (3 نقط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .نعتبر المستويين  $(P)$  و  $(P')$  اللذين معادلتها  $x + 2y - z + 1 = 0$  و  $-x + y + z = 0$ على الترتيب والنقطة  $A$  ذات الإحداثيات  $(0;1;1)$ .1. بين أن المستويين  $(P)$  و  $(P')$  متعامدين.

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3} + t \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = t \end{cases}$$

حيث  $t$  وسيط حقيقيبين أن المستويين  $(P)$  و  $(P')$  يتقاطعان وفق  $(D)$ .3. أحسب المسافة بين النقطة  $A$  وكل من المستويين  $(P)$  و  $(P')$ .4. استنتج المسافة بين النقطة  $A$  والمستقيم  $(D)$ .

التمرين 2 (3 نقط)

1. من الدرس: بين دستور المكاملة بالتجزئة باستعمال مشتق جداء دالتين مستمرتين

وقابلتين للاشتقاق على المجال  $[a; b]$ .2. نعتبر التكاملين المعرفين بما يلي:  $I = \int_0^\pi e^x \sin x \, dx$  و  $J = \int_0^\pi e^x \cos x \, dx$ أ- بين أن:  $I = -J$  و  $I = J + e^\pi + 1$ ب- استنتج القيمة المظبوطة لكل من  $I$  و  $J$ .

التمرين 3 (5 نقط)

الجزء A

نعتبر المعادلة  $(E): z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = 0$  حيث  $z$  عدد مركب.1. بين أن العدد المركب  $i$  هو حلاً للمعادلة  $(E)$ .

3. باسعمال معطية السؤال (2)، يُسئل تلميذا عشوائيا من بين التلاميذ الذين حصلوا على رخصة السياقة في المرة الأولى، احتمال أن يكون هذا التلميذ ذكراً هو:

(أ): 0.1 ، (ب): 0.091 ، (ج): 0.111 ، (د): 0.25

4. أحد الرماة يحاول إصابة هدف دائري يضم ثلاثة مجالات دائرية ذات نفس المركز وأنصاف قطر 10، 20 و 30 سنتيمتر، نفرض أن احتمال إصابة كل مجال متناسب مع مساحة هذا المجال وأن اللاعب يصيب دائما الهدف.

إن احتمال إصابة اللاعب لأبعد هدف عن المركز هو:

(أ):  $\frac{5}{9}$  ، (ب):  $\frac{9}{14}$  ، (ج):  $\frac{4}{7}$  ، (د):  $\frac{1}{3}$

التمرين 5 (5 نقط)

$f$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  بالدستور:  $f(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$   
( $C_f$ ) التمثيل البياني للدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ( $O; \vec{i}; \vec{j}$ ) معطى في نهاية التمرين، يطلب اكماله وتقديمه مع ورقة الاجابة.  
الجزء A: دراسة بعض خواص المنحني ( $C_f$ ).

1. يرمز  $f'$  إلى مشتقة الدالة  $f$ . أحسب  $f'(x)$  من أجل كل  $x$  من  $]-1; +\infty[$ .

2. من أجل كل  $x$  من  $]-1; +\infty[$ ، نضع:  $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$

تحقق اننا عرفنا دالة  $N$  متزايدة تماماً على المجال  $]-1; +\infty[$ .

أحسب  $N(0)$ ، واستنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  على المجال  $]-1; +\infty[$ .

3.  $D$  المستقيم الذي معادلته  $y = x$ . احسب احداثيات نقط تقاطع المنحني ( $C_f$ ) مع المستقيم  $D$ .

الجزء B: دراسة متتالية تراجعية معرفة بواسطة الدالة  $f$ .

1. بين انه: إذا كان  $x \in [0; 4]$  فإن  $f(x) \in [0; 4]$

2. نعتبر المتتالية العددية ( $u_n$ ) المعرفة بـ:  $u_0 = 4$  و من أجل كل  $n$  من  $N$ ،

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

أ- باستعمال التمثيل البياني ( $C_f$ ) والمستقيم  $D$ ، ضع على المنحني ( $C_f$ ) النقط دات

الفواصل  $u_0, u_1, u_2$  و  $u_3$ .

2. عَيّن الأعداد الحقيقية  $a, b, c$  بحيث يكون من أجل كل عدد مركب  $z$  لدينا:

$$z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = (z-i)(az^2 + bz + c)$$

3. استنتج حلول المعادلة (E).

الجزء B

في المستوي المركب المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر ( $O; \vec{u}; \vec{v}$ )، نعتبر النقط  $A, B$  و  $C$  صور الاعداد  $i, 2+3i$  و  $2-3i$  على الترتيب.

1. الدوران الذي مركزه  $B$  وزاويته  $\frac{\pi}{4}$ ، عَيّن لاحقة النقطة  $A'$  صورة النقطة  $A$

بالدوران  $r$ .

2. بين أن النقط  $A', B$  و  $C$  على استقامة واحدة، ثم اعط العبارة المركبة للتحاكي الذي مركزه  $B$  ويحول النقطة  $C$  إلى النقطة  $A'$ .

التمرين 4 (4 نقط)

لكل سؤال من الأسئلة الأربعة 1; 2; 3 و 4 هناك أربعة اجوبة مقترحة ( جواب واحد صحيح).

المرشح يضع على ورقة الاجابة رقم السؤال والعبارة التي يراها صحيحة. لا يطلب أي تعليل.

كل جواب صحيح علامته 1 و كل جواب غير صحيح علامته 0.

في بعض الأسئلة، الأجوبة المقترحة مدوّرة إلى  $10^{-3}$ .

1. ممثل تجاري يعرض منتوجا للبيع.

دراسة احصائية خلصت إلى أنه كلما عرض هذا الممثل التجاري منتوجه على مشتر، كان

احتمال بيعه للمنتوج يساوي 0.2.

يتعامل بمعدل خمس زبائن في اليوم، احتمال أن يبيع بالظبط منتوجين في اليوم هو:

(أ): 0.4 ، (ب): 0.04 ، (ج): 0.1024 ، (د): 0.2048

2. يمثّل الذكور في قسم ما ربع التلاميذ. من بين كل ثلاث تلميذات واحدة تحصلت على

رخصة السياقة في المرة الأولى، بينما يوجد تلميذ واحد ذكر من كل عشرة تلاميذ ذكور

حصل على رخصة السياقة في المرة الأولى. يُسأل تلميذاً ( ذكر أو أنثى) عشوائيا من

بمجموع تلاميذ القسم، احتمال كونه حصل على الرخصة في المرة الأولى هو:

(أ): 0.043 ، (ب): 0.275 ، (ج): 0.217 ، (د): 0.033

متعامدان فهما يتقاطعان وفق (D).

$$3. \text{ المسافة بين } A \text{ و } (P) \text{ هي: } \frac{|0+2-1+1|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\text{المسافة بين } A \text{ و } (P') \text{ هي: } \frac{|0+1+1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

4. استنتاج المسافة بين A والمستقيم (D).

نعتبر A' المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P)، و A'' المسقط العمودي

لنقطة A على المستوي (P') و B المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D).

لدينا في المثلث ABA' القائم في A' وحسب علاقة فيثاغورث pythagore :

$$AB = \sqrt{AA'^2 + AA''^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{2} \text{ هي: (D) المستقيم}$$

التمرين 2 (3 نقط)

1. u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على المجال [a; b]، u' و v' دالتهما المشتقة على

الترتيب مستمرتان على [a; b].

لدينا: دالة قابلة للاشتقاق على [a; b] و (uv)' = u'v + v'u

وبما أن الدوال u'v، v'u و (uv)' مستمرة على [a; b] فإنه بإمكاننا أن نكامل.

نجد:  $\int_a^b (uv)' = \int_a^b (u'v + v'u)$  يعني أن  $\int_a^b u'v + \int_a^b v'u = \int_a^b (uv)'$  كون uv دالة أصلية للدالة (uv)' على [a; b].

$$\text{ينتج أن: } \int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b v'u$$

2. أ- باستعمال دستور المكاملة بالتجزئة نبسط عبارة I.

$$\text{نضع: } \begin{cases} u(x) = e^x \\ v'(x) = \sin x \end{cases} \text{ ينتج أن } \begin{cases} u'(x) = e^x \\ v(x) = -\cos x \end{cases}$$

$$I = \int_0^\pi e^x \sin x \, dx = \int_0^\pi u(x)v'(x) \, dx$$

$$= [-e^x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi e^x \cos x \, dx = e^\pi + 1 + J$$

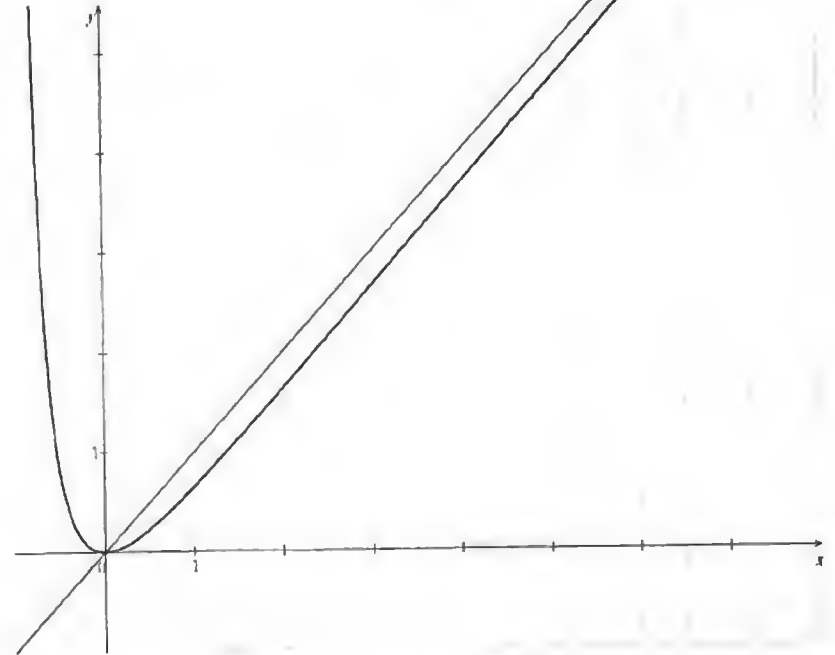
$$I = J + e^\pi + 1 \text{ أي}$$

ب- يبين أنه من أجل كل n من N،  $u_n \in [0; 4]$ .

ج- ادرس رتبة المتتالية  $(u_n)$ .

د- يبين أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة، نرسم I لنهاتها.

و- استعمل الجزء A لإيجاد قيمة I.



تصحيح الموضوع العاشر

بكالوريا علوم تجريبية --- جوان 2007 --- فرنسا

التمرين 1 (3 نقط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

1.  $\vec{n}(1; 2; -1)$  شعاع ناظم للمستوي (P)،  $\vec{n}'(-1; 1; 1)$  شعاع ناظم للمستوي (P').

لدينا:  $\vec{n} \cdot \vec{n}' = -1 + 2 - 1 = 0$  معناه  $\vec{n} \perp \vec{n}'$  وبالتالي المستويان (P) و (P') متعامدان.

2. لدينا:  $\left(-\frac{1}{3} + t\right) + 2\left(-\frac{1}{3}\right) - t + 1 = 0$  معناه  $(D) \subset (P)$

و  $-\left(-\frac{1}{3} + t\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) + t = 0$  معناه  $(D) \subset (P')$  وبما أن (P) و (P')

$$I + J = \int_0^{\pi} e^x (\sin x + \cos x) dx = \sqrt{2} \int_0^{\pi} e^x \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx =$$

باستعمال المكاملة بالتجزئة وبعد وضع:

$$\begin{cases} u'(x) = e^x \\ v(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \end{cases} \text{ ينتج أن } \begin{cases} u(x) = e^x \\ v'(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

$$I = -J \text{ أي } I + J = \sqrt{2} \left[ \left[ e^x \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx \right] = 0 \text{ إذا:}$$

$$\begin{cases} J = -\frac{1}{2}(e^{\pi} + 1) \\ I = \frac{1}{2}(e^{\pi} + 1) \end{cases} \text{ نجد } \begin{cases} I = J + e^{\pi} + 1 \\ I = -J \end{cases}$$

التمرين 3 (5 نقط)

الجزء A

نعتبر المعادلة  $(E): z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = 0$  حيث  $z$  عدد مركب.

$$1. \text{ لدينا: } i^3 - (4+i)i^2 + (13+4i)i - 13i = -i + (4+i) + 13i - 4 - 13i = 0$$

معناه  $i$  هو حلاً للمعادلة  $(E)$ .

2. من أجل كل عدد مركب  $z$ ,

$$\begin{aligned} z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i &= (z-i)(az^2 + bz + c) \\ &= az^3 + (b-ia)z^2 + (c-ib)z - ic \end{aligned}$$

$$\text{بالمطابقة نجد: } a=1 \text{ و } b-ia=-4-i \text{ و } c-ib=13+4i \text{ و } -ic=-13i$$

$$\text{أي: } a=1 \text{ و } b=-4 \text{ و } c=13$$

$$3. \text{ استنتاج حلول المعادلة } (E): (z-i)(z^2 - 4z + 13) = 0 \text{ لدينا}$$

$$\text{تكافئ } (z^2 - 4z + 13 = 0 \text{ أو } z = i)$$

$$z_2 = 2+3i \text{ و } z_1 = 2-3i \text{ هما: حلّي المعادلة } z^2 - 4z + 13 = 0$$

$$\text{وبالتالي مجموعة حلول } (E) \text{ هي: } S = \{i; 2+3i; 2-3i\}$$

الجزء B

المستوي المركب مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . النقاط  $A, B$  و  $C$  صور الاعداد

$i, 2+3i$  و  $2-3i$  على الترتيب.

$$1. M'(z') \text{ صورة } M(z) \text{ بالدوران } r \text{ يعطى العبارة: } z' - z_H = e^{i\frac{\pi}{4}}(z - z_H)$$

$$\text{إذا: } z_{A'} - z_H = e^{i\frac{\pi}{4}}(z_A - z_H)$$

$$\text{وبالتالي: } z_{A'} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(-2-2i) + 2+3i = 2 + (3-2\sqrt{2})i$$

إذا لاحقة  $A'$  هي  $2 + (3-2\sqrt{2})i$

$$2. \text{ لاحقة الشعاع } \overrightarrow{BC} \text{ هي: } z_C - z_H = -6i \text{ و لاحقة الشعاع } \overrightarrow{BA'} \text{ هي: } z_{A'} - z_H = -2\sqrt{2}i$$

$$\text{لدينا: } -6i = \frac{3}{\sqrt{2}}(-2\sqrt{2}i) \text{ أي الشعاعان } \overrightarrow{BC} \text{ و } \overrightarrow{BA'} \text{ متوازيان، وبالتالي النقط } A', B \text{ و } C$$

$$\text{على استقامة واحدة. ولدينا } z_{A'} - z_H = \frac{3}{\sqrt{2}}(z_{A'} - z_H) \text{ العبارة المركبة للتحاكي المطلوب.}$$

التمرين 4 (4 نقط)

1. احتمال أن يبيع بالظبط متوجين في اليوم هو

$$p(X=2) = C_5^2 (0.2)^2 \times (1-0.2)^3 \approx 0.2048 \text{ الإجابة (د).}$$

2. احتمال كون التلميذ حصل على الرخصة في المرة الأولى

$$\text{هو: } p(M) + p(F) = 0.025 + 0.25 = 0.275 \text{ الإجابة (ب).}$$

3. احتمال أن يكون التلميذ ذكراً علماً أنه حصل على الرخصة في المرة الأولى

$$\text{هو: } p_p(M) = \frac{0.025}{0.275} \approx 0.091 \text{ الإجابة (ب).}$$

4. احتمال إصابة اللاعب لأبعد هدف عن المركز هو:  $\frac{9}{14}$  الإجابة (ب).

$$\text{نجدده بحل جملة ثلاث معادلات: } \begin{cases} \frac{p_1}{1} = \frac{p_3}{9} \\ \frac{p_2}{4} = \frac{p_3}{9} \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases} \text{ تكافئ } p_3 = \frac{9}{14}$$

التمرين 5 (5 نقط)

$$f \text{ الدالة العددية المعرفة على المجال } ]-1; +\infty[ \text{ بالدستور: } f(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

ب-  $u_0 \in [0;4]$  محققة. نفرض أن  $u_k \in [0;4]$  محققة إلى الرتبة  $k$ .

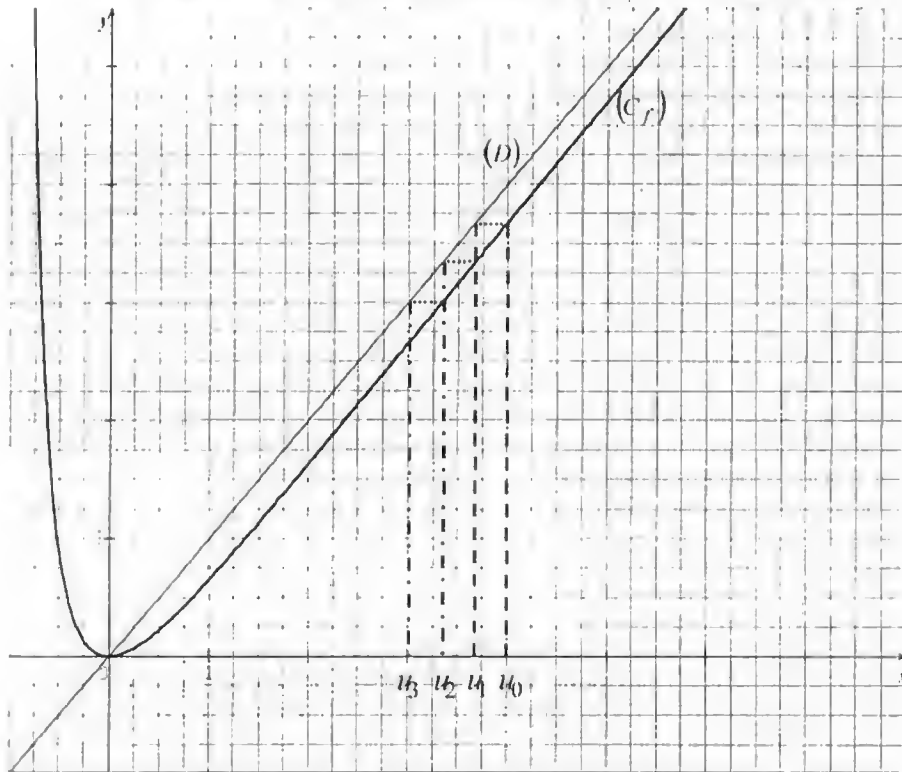
باستعمال السؤال السابق بما أن  $u_k \in [0;4]$  فإن  $f(u_k) \in [0;4]$  أي  $u_{k+1} \in [0;4]$  إذاً من أجل كل  $n$  من  $N$ ،  $u_n \in [0;4]$ .

ج- من أجل كل  $n$  من  $N$ ،  $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \leq 0$ ،  
كون  $(C_f)$  تحت  $D$  في المجال  $[0;4]$ . حسب ما سبق (أو من الرسم)  
إذاً:  $(u_n)$  متناقصة تماماً على  $N$ .

د- بما أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماماً على  $N$  ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 فهي متقاربة نحو  $l$ . حيث:  $l \geq 0$

و- لدينا:  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n) = f(l)$   
وبما أن الحل الوحيد للمعادلة  $f(x) = x$  هو 0، فإن  $l = 0$ .

كما يمكن ملاحظة أن:  $(C_f)$  و  $D$  يتقاطعان عند النقطة ذات الفاصلة 0. فإن  $l = 0$ .



الجزء A: دراسة بعض خواص المنحني  $(C_f)$ .

1. من أجل كل  $x$  من  $]-1; +\infty[$ .

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} \frac{(x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2} = 1 - \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

2. من أجل كل  $x$  من  $]-1; +\infty[$ ،  $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$ ،

$$N'(x) = 2(1+x) + \frac{1}{x+1} = \frac{2(x+1)^2 + 1}{x+1}$$

لدينا  $N'(x) > 0$  كون  $x+1 > 0$  يعني أن الدالة  $N$  معرّفة ومتزايدة تماماً على  $]-1; +\infty[$ .

وبما أن  $N(0) = 1 - 1 = 0$  فإن إشارة  $f'(x) = \frac{N(x)}{(x+1)^2}$  هي إشارة

$N(x)$  المعطاة بالجدول التالي:

$x$	-1	0	$+\infty$
$N(x)$		0	

إذاً  $f$  متزايدة تماماً على المجال  $[0; +\infty[$ ، ومتناقصة تماماً على المجال  $]-1; 0]$ .

3. نقطة تقاطع  $(C_f)$  مع المستقيم  $D$  معناه  $\begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} \ln(x+1) = 0 \\ y = x \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} x = f(x) \\ y = x \end{cases}$$

أي  $M(0;0)$  هي نقطة تقاطع  $(C_f)$  و  $D$ .

الجزء B: دراسة متتالية تراجعية معرّفة بواسطة الدالة  $f$ .

1. الدالة  $f$  مستمرة و متزايدة تماماً على المجال  $[0; +\infty[$  وبالأخص على  $[0;4]$

إذاً: إذا كان  $x \in [0;4]$  فإن  $f(x) \in [f(0); f(4)]$  ولدينا:  $f(0) = 0$  و  $f(4) \approx 3.68$  أي  $f(x) \in [0; 3.68] \subset [0;4]$ .

2.  $u_0 = 4$  ومن أجل كل  $n$  من  $N$ ،  $u_{n+1} = f(u_n)$

أ- الرسم في نهاية التمرين.



## تكامل دالة مستمرة

•  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$  حيث  $F$  دالة أصلية للدالة  $f$  على مجال  $I$  يضم  $a$  و  $b$ .

• القيمة المتوسطة للدالة  $f$  على المجال  $[a; b]$ :  $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ .

• علاقة شال:  $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$ .

• الخطية:  $\alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx$ .

• الإيجابية: إذا كانت  $f \geq 0$  و  $a \leq b$  فإن  $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ .

• المكاملة بالتجزئة:  $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$ .

المعادلة التفاضلية  $y' = ay + b$ 

• الحلول على  $R$  للمعادلة التفاضلية  $y' = ay + b$  حيث  $a$  و  $b$  عددان حقيقيان هي

الدوال  $x \mapsto \alpha + Ke^{ax}$  حيث  $K$  عدد حقيقي و الدالة الثابتة  $\alpha$  حلا لها.

• بالخصوص الحلول على  $R$  للمعادلة التفاضلية  $y' = ay$  هي الدوال  $x \mapsto Ke^{ax}$  حيث  $K$  حقيقي.

## الاعداد المركبة

• الشكل الجبري:  $z = x + iy$  حيث  $x$  و  $y$  عددان حقيقيان.

• الشكل المثلثي:  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  حيث  $r > 0$  و  $\theta$  عدد حقيقي.

• الشكل الأسّي:  $z = re^{i\theta}$  حيث  $r > 0$  و  $\theta$  عدد حقيقي.

• الجزء الحقيقي:  $\operatorname{Re}(z) = x = r \cos \theta$ .

• الجزء التخيلي:  $\operatorname{Im}(z) = y = r \sin \theta$ .

• الطويلة:  $|z| = r = OM = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ .

• عمدة:  $\arg(z) = \theta = (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) + 2k\pi$  عدد صحيح.

• المرافق:  $\bar{z} = x - iy$ .

• الحساب في  $C$ .

•  $|z+z'| \leq |z| + |z'|$ ,  $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$ ,  $|zz'| = |z| \times |z'|$ ,  $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}'$ ,  $\overline{zz'} = \bar{z} \bar{z}'$ .

•  $|e^{i\theta}| = 1$ ,  $e^{i\theta} = \frac{1}{e^{-i\theta}} = e^{-i\bar{\theta}}$ ,  $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$ ,  $e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ .

$(O; \vec{u}; \vec{v})$  معلم للمسوي  
متعامد ومتجانس.  
 $M$  صورة العدد المركب  $z$ .

## المشتقات والدوال الأصلية

• الدوال: اللوغاريتم النيبيري، الأسية، القوة

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \exp'(x) = e^x, \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

• دساتير الاشتقاقية

$$(g \circ u)' = u' \times (g' \circ u), \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, (uv)' = u'v + v'u$$

$$(e^u)' = u'e^u, (\ln u)' = \frac{u'}{u}, (u^n)' = nu'(u^{n-1})$$

• الدوال المثلثية

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \cos'(x) = -\sin x, \sin'(x) = \cos x$$

• دساتير المكاملة

$$\frac{u'}{u} \text{ دوالها الأصلية هي } \ln|u| + k$$

$$u'u^n \text{ دوالها الأصلية هي } \frac{1}{n+1} u^{n+1} \quad n \neq -1$$

## اللوغاريتم والأسية

الدالتين  $\ln$  و  $\exp$  متعاكستين إحداها بالنسبة للآخرى: من اجل  $x$  و  $y$  حقيقيان

$$x > 0, y = \ln x \text{ يكافئ } x = e^y$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 0^+, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^x = 0^+, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^-, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$$

الدالة الأسية ذات الأساس  $a$  ( $a > 0$  و  $a \neq 1$ )

$$(a^x)^y = a^{xy}, \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, a^x a^y = a^{x+y}, a^0 = 1, a^x = e^{x \ln a}$$

الدالة  $\ln$

$$\ln(x^n) = n \ln x, \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y, \ln xy = \ln x + \ln y, \ln e = 1, \ln 1 = 0$$

## الآلة الحاسبة البيانية المبرمجة TI-83 plus

Hard equation

اللمسات الصفراء: أضغط أولاً على  $2^{nd}$  . للعودة إلى شاشة الحساب أضغط على  $QUIT$  .  
 اللمسات الخضراء: أضغط أولاً على ALPHA . للعودة إلى شاشة الحساب أضغط على نفس النغمة

الدوال

الدستور: نعتبر  $f(x) = 3x - 2 + \frac{1}{x-2}$  نحجز  $f'(x)$  عند اللمسة  $Y=$

Plot1 Plot2 Plot3  
 $\backslash Y_1 = 3X - 2 + 1 / (X - 2)$   
 $\backslash Y_2 =$   
 $\backslash Y_3 =$

لإظهار المتغير  $x$  استعمل اللمسة  $X.T.O.n$

بشرط أن يكون  $MODE$  مثبت عند  $Func$

جدول القيم:

TBL SET تحدد بداية الجدول والخطوة المختارة.

TABLE SETUP

TblStart = 0

ATbl = 1

Indpnt: Auto Ask

Depend: Auto Ask

حدد  $Auto$  للحصول على الجدول بطريقة آلية.

X	Y <sub>1</sub>
0.0	-2.5
1.0	0.0
2.0	ERROR
3.0	8.0
4.0	10.5
5.0	13.3
6.0	16.3
Y <sub>1</sub> = -2.5	

المنحني:

WINDOW لاختيار النافذة  $X \in [-4;3]$  و  $Y \in [-3;6]$  مثلاً

GRAPH لمشاهدة المنحني على الشاشة.

TRACE لقراءة إحداثيات النقط من المنحني.

ZOOM 4: Zdecimal النافذة  $X \in [-4.7;4.7]$  و  $Y \in [-3.1;3.1]$

تسمح بتتبع المنحني بواسطة اللمسة  $TRACE$  بخطوة مقدارها 0.1.

ZoomFit 0: نختار مجال لقيم  $X$  ونختار الآلة قيم  $Y$  الموافقة.

العدد المشتق والمشتقة

nDeriv(Y<sub>1</sub>,X,1  
 1.9

في شاشة الحساب نستعمل  $MATH$  : 8. nDeriv

نحسب العدد المشتق للدالة  $f$  عند القيمة 1. مثال:

فيظهر على الشاشة:  $f'(1) = 1.9$

العبارة المركبة للتحويلات النقطية المألوفة.

التناظر المحوري  $S(O_X)$ :  $z' = \bar{z}$

الانسحاب  $I_{\vec{w}}$ :  $z' = z + b$  حيث  $b$  لاحقة شعاع الانسحاب  $\vec{w}$ .

الدوران  $R_{\Omega, \theta}$ :  $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$  حيث  $\omega$  لاحقة المركز  $\Omega$ .

التحاكي  $h_{\Omega, k}$ :  $z' - \omega = k(z - \omega)$  حيث  $\omega$  لاحقة المركز  $\Omega$ .

الجداء السلمي في الفضاء

في العلم المتعامد والمتجانس: إذا كان  $\vec{u}(x_1, y_1, z_1)$  و  $\vec{v}(x_2, y_2, z_2)$  فإن  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

إذا كان  $\theta$  قياساً للزاوية  $(\vec{u}, \vec{v})$  فإن  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta$

إذا كانت  $A, B, C$  و  $H$  نقط من الفضاء حيث  $A \neq B$  و  $H$  المسقط العمودي

لنقطة  $C$  على  $(AB)$ . فإن  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AH}$

علاقة الكاشي: في المثلث  $ABC$ ,  $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC} \times \overline{BC} \times \cos(\overline{AC}, \overline{BC})$

معادلات في المستوى أو في الفضاء

في العلم المتعامد والمتجانس للمستوي.

المستقيم  $(D)$  له معادلة من الشكل:  $ax + by + c = 0$  حيث  $a$  و  $b$  غير معلومين معا.

شعاع توجه  $(D)$  هو:  $\vec{d}(-b; a)$  ، شعاع ناظم على  $(D)$  هو:  $\vec{n}(a; b)$

الدائرة  $(c)$  لها معادلة من الشكل:  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

مركز  $(c)$  هو:  $\Omega(a; b)$  ، نصف قطر  $(c)$  هو:  $r$

في العلم المتعامد والمتجانس للفضاء.

المستوي  $(P)$  له معادلة من الشكل:  $ax + by + cz + d = 0$  حيث  $a, b, c$  ليست كلها معلومة.

شعاع ناظم على  $(P)$  هو:  $\vec{n}(a; b; c)$

اسطوانة دورانية محورها  $(Oz)$  و نصف قطرها  $r$  لها معادلة من الشكل:  $x^2 + y^2 = r^2$

مخروط دوراني رأسه  $O$  ومحوره  $(Oz)$  له معادلة من الشكل:

$x^2 + y^2 - kz^2 = 0$  مع  $k > 0$

سطح الكرة له معادلة من الشكل:  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$

مركزها هو:  $\Omega(a; b; c)$  ، نصف قطرها هو:  $r$

كما يمكن إدخال الدالة المشتقة  $f'$  عند  $Y=$  ونحسب مباشرة صورة  $|$  بالدالة  $Y_2$ .

الحساب التكامل

في شاشة الحساب نستعمل **MATH** 9: fnInt(

fnInt(Y1, X, -1, 1)  
- 5.09

نحسب التكامل  $\int_1^2 f(x)dx$ .

الحساب انطلاقاً من المنحني

1: value **CALC** : نحجز قيمة للعدد  $X$  فنحصل على قيمة  $f(X)$  الموافقة.

2: Zero : نحجز طرفي المجال وقيمة مقربة لحل المعادلة  $f(x) = 0$

ونصادق، فنحصل على فاصلة نقطة تقاطع المنحني مع حامل محور الفواصل.

3: minimum و 4: maximum : نحجز طرفي المجال وقيمة مقربة

لفاصلة الذروة ونصادق، فنحصل على فاصلة الذروة للمنحني.

6: dX/dY : نحجز قيمة للعدد  $X$  فنحصل على قيمة  $f'(X)$  الموافقة.

7:  $\int f(X)dx$  : نحجز حدّي التكامل  $a$  و  $b$  ونصادق فنحصل

على قيمة التكامل، ونلاحظ على الرسم أن الحيز يشطب.

الرسم على المنحني

3: Horizontal **DRAW** لرسم المستقيم  $y = b$  و 4: Vertical لرسم

المستقيم  $x = c$ . انطلاقاً من شاشة الحساب احجز القيمة  $b$  و صادق.

5: Tangent( : نحجز فاصلة نقطة التماس ونصادق فنحصل على رسم

للمماس ومعادلته المختصرة.

1: ClrDraw : لإزالة كل الرسومات المنجزة.

2: Line( : لرسم قطعة مستقيمة.

القوائم والاحتمالات

الحساب على القوائم

1: Edit **STAT** لحجز القائمتين  $L_1$  و  $L_2$

لإزالة إحدى القوائم، نضع الزائق فوق اسم القائمة.

المرغوب إزالتها ثم نضغط على **CLEAR** ونصادق.

1.1	1.2	1.3
0	-1	-----
1	-2	
3	-3	
4	-1.5	
6	-0.5	
8	-2	
10	-1	
L3 =		

لإزالة قيمة من القائمة، نضع الزائق فوقها ثم نضغط على اللمسة **DEL**.

لإضافة قيمة إلى القائمة، نضع الزائق فوق القيمة التي تسبقها ثم نضغط على اللمسة **INS**.

يمكننا حساب مجموع، جداء، القيم في القائمة، كما يمكن حساب صورة القيم في

القائمة بواسطة دالة  $Y$ . ويكون ذلك بوضع الزائق فوق اسم القائمة ثم نصادق،

ونسجل في أسفل الجدول العملية المرغوب إنجازها. مثلاً:  $L_2 \rightarrow Y_1(L_1)$  ونصادق

فتظهر صور قيم القائمة بالدالة  $Y_1$ .

كما يمكننا الحساب مباشرة على الشاشة.

لحساب المجموع والجداء مثلاً لقيم القائمة :

5: sum( **MATH** **LIST** أو 6: prod(

حساب الوسيط لقانون الاحتمال

إذا كان قانون الاحتمال معرفً بالثنائية  $(x_i, p_i)$ ،

فإننا نضع القيم  $x_i$  في القائمة  $L_1$  ونضع الاحتمالات  $p_i$

في القائمة  $L_2$ . نحسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري

للاحتمال باستعمال اللمسات التالية:

1: Var Stats **STAT**  $L_1$  و  $L_2$  ونصادق

المتتاليات

لتكن المتتالية  $u_n$  ، و  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$  ، و  $u_0 = 2$

في البرنامج **MODE** اختر Seq وصادق.

يمكنك حساب حدود المتتالية  $(u_n)$ .

وذلك بحجز المتتالية عند  $Y=$ .

لحجز الحرف  $n$  نستعمل اللمسة **X,T,n**.

التمثيل البياني لمتتالية

بعد حجز المتتالية وحدها الأول عند اللمسة  $Y=$ . نعدّل نافذة الرسم باللمسة **Window**.

ونختار **Time FORMAT** ثم اللمسة **GRAPH**. (التمثيل يكون على شكل نقاط معزولة)

أو نختار **Web FORMAT** ثم اللمسة **GRAPH**. (التمثيل يستخرج من منحني دالة)

1 - VarStats

$\bar{x} = 4.71$

$\sum x = 4.62$

$\sum x^2 = 24.50$

$S_x =$

$\sigma_x = 1.67$

$\downarrow n = 1$

plot1 plot2 plot3

nMin = 0

$u(n) / \sqrt{u(n-1) + 1}$

)

$u(nMin) / \{2\}$

$v(n) =$

الصفحة	العنوان	
3	المقدمة	•
★	الفصل الأول- ملخص الدرس وتطبيقات-	★
5	الحساب	1
12	تمارين تطبيقية- تمارين للتدريب	•
17	الدوال العددية	2
31	تمارين تطبيقية- تمارين للتدريب	•
39	الدالة الأسية - الدالة اللوغاريتمية	3
43	تمارين تطبيقية- تمارين للتدريب	•
53	المتتاليات العددية	4
58	تمارين تطبيقية- تمارين للتدريب	•
68	الحساب التكاملي	5
71	تمارين تطبيقية- تمارين للتدريب	•
80	الاحتمالات	6
88	تمارين تطبيقية- تمارين للتدريب	•
97	الأعداد المركبة	7
104	تمارين تطبيقية- تمارين للتدريب	•
113	التشابهات المستوية المباشرة	8
115	تمارين تطبيقية- تمارين للتدريب	•
125	الهندسة الفضائية	9
126	تمارين تطبيقية- تمارين للتدريب	•
136	المقاطع المستوية للسطوح	10
138	تمارين تطبيقية- تمارين للتدريب	•
★	الفصل الثاني - مواضيع البكالوريا وحلولها-	★
146	بكالوريا فرنسا- سبتمبر 2005	1
155	بكالوريا كاليدونيا الجديدة - نوفمبر 2005	2
166	بكالوريا أمريكا الشمالية- ماي 2006	3
179	بكالوريا لبنان- ماي 2006	4
188	بكالوريا غويانا الفرنسية - جوان 2006	5
198	بكالوريا فرنسا- جوان 2006	6
207	بكالوريا لارنيون - جوان 2006	7
218	بكالوريا فرنسا- سبتمبر 2006	8
228	بكالوريا المغرب- جوان 2007	9
237	بكالوريا فرنسا- جوان 2007	10
246	دساتير	•
249	استعمال الحاسبة البيانية TI - 83 plus	•

# خطوة... خطوة نحو النجاح



## أهداف الكتاب Hard Equation

- يمكن الطالب من الحصول على معلومات محددة و ملخصة.
- يساعد الطالب على تطبيق المعلومات التي تحصل عليها في القسم.
- يدرب الطالب على الاستيعاب الحسن للترسيخ الجيد للمعلومات.
- يحضر الطالب لاجتياز امتحان البكالوريا.





أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي و للمؤلف بالخير



و النجاح و المغفرة

**Hard\_equation**